APLICAÇÃO DO MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA NA ANÁLISE MATRICIAL DE TRELIÇAS PLANAS INDETERMINADAS ESTATICAMENTE

<u>Luís F. dos Santos Ribeiro</u>[1] (EG), Eliana Carla Rodrigues[1] (PQ), Lucas Silveira F. Silva[1] (EG), Pedro M. Junior[1] (EG).

[1]Instituto Federal de Goiás, *Campus* Formosa.

Área do Conhecimento: Engenharias.

As treliças são um tipo de estrutura composta por barras interligadas em suas extremidades, a região onde ocorre a conexão entre uma ou mais barras é chamada de nó. O método tradicional para a análise estrutural deste tipo de estrutura consiste na determinação do equilíbrio dos elementos que constituem a estrutura, sendo estes as barras e os nós, e para os deslocamentos, o princípio de conservação de energia. Soluções assim, podem se tornar extensas e inviáveis, portanto, dentre os diversos métodos de análise estrutural existentes, este trabalho é voltado para o método da rigidez direta, aplicado em treliças planas indeterminadas estaticamente, onde, por meio da construção de matrizes que representam a rigidez dos elementos, busca-se soluções para analise estrutural de forma eficiente, pois, esse método viabiliza o uso de softwares computacionais, visto que, na prática podem ocorrer surgimento de sistemas lineares de grandes dimensões. A metodologia empregada neste trabalho foi a construção de um referencial teórico por meio de pesquisas bibliográficas com proposito de compreender o tema estudado para posterior aplicação. Os resultados que serão apresentados demonstram os procedimentos e a solução para uma análise estrutural de uma treliça plana indeterminada estaticamente demonstrando o êxito na utilização da análise matricial.

Palavras-chave: *Análise estrutural; Rigidez Direta; Treliças.*

Introdução

Em sua totalidade, cursos relacionados às engenharias, possuem diversas disciplinas básicas em seus primeiros períodos. Tais disciplinas como: Álgebra Linear, Geometria Analítica e Cálculo Diferencial e Integral. Na Engenharia Civil, essas disciplinas são base para posteriores matérias relacionadas a Cálculos Estruturais, as quais terão como objetivo qualificar profissionais capazes de elaborar modelos para descrever e analisar situações, testar hipóteses e otimizar processos.

Este trabalho está direcionado para um estudo, por meio de cálculos matriciais, de treliças indeterminadas estaticamente, representando o Método da Rigidez Direta. Contudo, neste contexto foram admitidas apenas cargas estáticas bem como um comportamento linear para as estruturas.

O conhecimento destas áreas da matemática, é de suma importância para futuros cálculos estruturais, portanto, o objetivo deste trabalho, é trazer conhecimento sobre cálculos de esforços provocados sobre treliças com apoio na disciplina de Álgebra Linear.

Material e Métodos

Esse estudo teve como principal metodologia pesquisas bibliográficas em artigos, sites, livros, etc. Construído o referencial teórico promovemos análises estruturais de modo que o conhecimento adquirido fosse colocado à prova. Desta forma, o Método da Rigidez tem como passo a passo o seguinte procedimento.

O primeiro passo ao aplicar o método da Rigidez Direta é promover uma identificação dos elementos e dos nós presentes no modelo estrutural. Posteriormente, construir um sistema de eixos de referência, sendo eles um local e um global. Construído os referenciais é necessário o auxílio de matrizes de transformação **(T).** Essas matrizes são obtidas através de relações trigonométricas, seno e cosseno, que relacionam os eixos do sistema local com os eixos do sistema global.

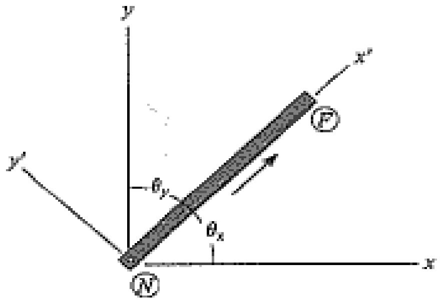

Figura 1: Representação do sistema de referência local (x', y') e global (x,y). (**Fonte**: Hibbeller)

A partir das relações citadas anteriormente, tem-se λx, cosseno diretor do ângulo entre x' e x, e λy, cosseno diretor do ângulo entre y' e y representados na figura 1 acima. Elas são estruturadas de modo que quando combinadas com as matrizes de rigidez transforme as coordenadas locais em globais. A figura a seguir é a representação de um elemento estrutural, em que está sendo representado um sistema de eixos de referência (x,y) que é utilizado como referencial para os demais cálculos.

Após a primeira fase de organização do modelo estrutural, o próximo passo é identificar os graus de liberdade presentes em cada nó, que no caso treliça representa os esforços de tração e compressão na qual a mesma pode estar sujeita.

Essas são as incógnitas primárias para o Método da Rigidez Direta que vão nos resultar nos deslocamentos e nas reações de apoio das estruturas que serão posteriormente analisadas. Para facilitar o processo iremos representar os graus desconhecidos (não restringidos) com os números mais baixos e os graus conhecidos (restringidos) com os números mais altos.

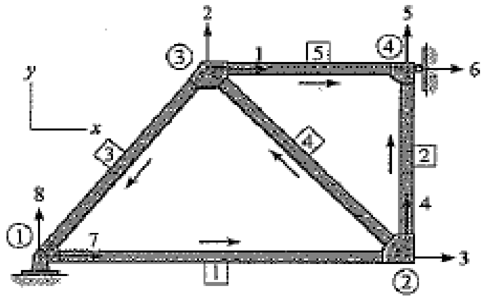

Figura 2: Representação da indeterminação cinemática de uma treliça. (**Fonte**: Hibbeler)

Pode se dizer que o MRD possui o mesmo procedimento de análise para as diversas conformações estruturais existentes, porém, no momento de construir as matrizes de rigidez o método possui particularidades resultantes do tipo da estrutura abordada. No caso das treliças estudadas, as matrizes de rigidez são compostas apenas por valores referentes a esforços normais, pois essa é a principal característica das estruturas treliçadas.

$$\mathrm{K} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y & -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y \\ \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 & -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^2 \\ -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y & \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y \\ -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^2 & \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 \end{bmatrix}$$

Figura 3: Matriz de rigidez global de um elemento de treliça. (**Fonte**: Própria)

A matriz de rigidez acima é a matriz de rigidez utilizada nas análises de treliças via MRD, onde A é a área da seção transversal dos elementos da treliça, E é o módulo de elasticidade do e L o seu comprimento. Para cada estrutura foi usada a matriz de rigidez padrão e após a elaboração da matriz de rigidez de cada membro é feita uma sobreposição das mesmas, de modo obter a matriz de rigidez global da estrutura.

Após a confecção das matrizes de rigidez devemos construir os vetores de força {Q} e deslocamento {D} que compreenderam as reações de apoio e forças externas a respectiva estrutura.

$$\{Q\}=[K] \times \{D\}+ q_0 \qquad \textbf{(1)}$$

A equação (1) é responsável por todo o método da rigidez. Ela diz que a força provocada em um nó é igual a rigidez do membro vezes o deslocamento sofrido pelo nó mais, caso tenha, alguma carga inicial pré cálculada.

Construído os vetores e as matrizes que serão introduzidas ao método e feitas as operações matriciais, teremos um sistema linear de grande dimensão, que para ser solucionado, foi utilizado o software Mathlab.

Resultados e Discussão

Aqui será descrito a análise estrutural de uma treliça indeterminada estaticamente composta por seis barras, de maneira a mostrar o procedimento do MRD em uma análise real.

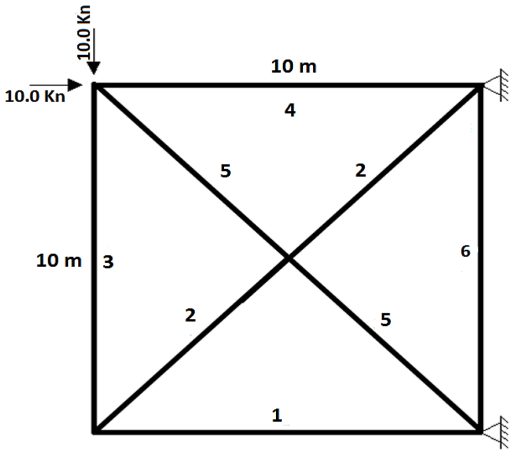

Figura 4: Modelo estrutura da Treliça analisada. (**Fonte**: Própria)

No processo de análise de treliça via MRD, primeiramente foram numerados os nós e as hastes de modo a promover uma organização do modelo analisado. Em seguida foram elaboradas as matrizes de rigidez de cada membro.

$$\mathbf{k1}=\mathbf{k4} = AE \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & -0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k3}=\mathbf{k6} = AE \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & -0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Figura 5: Matriz de rigidez referente às barras 1, 3, 4 e 6 (**Fonte**: Própria)

$$\mathbf{k2} = AE \begin{bmatrix} 0,035 & 0,035 & -0,035 & -0,035 \\ 0,035 & 0,035 & -0,035 & -0,035 \\ -0,035 & -0,035 & 0,035 & 0,035 \\ -0,035 & -0,035 & 0,035 & 0,035 \end{bmatrix}$$

Figura 6: Matriz de rigidez referente à barra 2 (**Fonte**: Própria)

$$\mathbf{k5} = AE \begin{bmatrix} 0,035 & -0,035 & -0,035 & 0,035 \\ -0,035 & 0,035 & 0,035 & -0,035 \\ -0,035 & 0,035 & 0,035 & -0,035 \\ 0,035 & -0,035 & -0,035 & 0,035 \end{bmatrix}$$

Figura 7: Matriz de rigidez referente à barra 5 (**Fonte**: Própria)

Construídas as matrizes de rigidez de cada barra, é feito uma sobreposição das matrizes dos membros. Essa sobreposição consiste em rearranjar todas as matrizes em uma só, ou seja, efetuar operações referentes aos graus de liberdade que podem ou não estar presentes em uma ou mais matrizes de rigidez dos membros. Desta forma, visamos a obtenção da matriz de rigidez global.

$$\mathbf{K} = AE \begin{bmatrix} 0,135 & 0,035 & 0 & 0 & 0 & -0,1 & -0,035 & -0,035 \\ 0,035 & 0,135 & 0 & -0,1 & 0 & 0 & -0,035 & -0,035 \\ 0 & 0 & 0,135 & -0,035 & 0,035 & -0,035 & -0,1 & 0 \\ 0 & -0,1 & -0,035 & 0,135 & -0,035 & 0,035 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,035 & -0,035 & 0,135 & -0,035 & 0 & -0,1 \\ -0,1 & 0 & -0,035 & 0,035 & -0,035 & 0,135 & 0 & 0 \\ -0,035 & -0,035 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & 0,135 & 0,035 \\ -0,035 & -0,035 & 0 & 0 & -0,1 & 0 & 0,035 & 0,135 \end{bmatrix}$$

Figura 8: Matriz de rigidez global da Treliça (F**onte**: Própria)

Elaborada a matriz de rigidez global da estrutura analisada. O problema segue com a confecção dos vetores referentes aos deslocamentos e as cargas nodais que são aplicadas à estrutura.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d1 \\ d2 \\ d3 \\ d4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = 10^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ -10 \\ q5 \\ q6 \\ q7 \\ q8 \end{bmatrix}$$

Figura 9: Vetores referentes aos deslocamentos e as cargas aplicadas à estrutura (**Fonte**: Própria)

O vetor deslocamento possui componentes nulos devido à restrição promovida pelos apoios. Os deslocamentos que possuem valores diferentes de zero são os que não estão restringidos. Quanto às cargas tem quatro valores conhecidos, sendo eles referentes às cargas nodais aplicadas a estrutura, q1, q2, q3 e q4. A partir dos dados obtidos acima e como não temos valores iniciais de carga, pode-se então aplicar na equação 2 referente ao Método e obter os deslocamentos e reações de apoio diretamente.

Feitas as devidas substituições e operações, o procedimento resulta em dois sistemas lineares, o primeiro nos fornece os deslocamentos desconhecidos e o segundo resulta nas reações de apoio.

$$\mathbf{D} = \frac{1}{10^6} \begin{bmatrix} 1,639 \\ -6,323 \\ 1,639 \\ -7,963 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = 10^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ -10 \\ 6,720 \\ -10 \\ 0 \\ 3,279 \end{bmatrix}$$

Figura 10: Vetores referentes aos deslocamentos e as cargas aplicadas na estrutura (**Fonte**: Própria)

Aplicando os valores obtidos à estrutura analisada temos como resultados as reações de apoio na qual a estrutura está submetida.

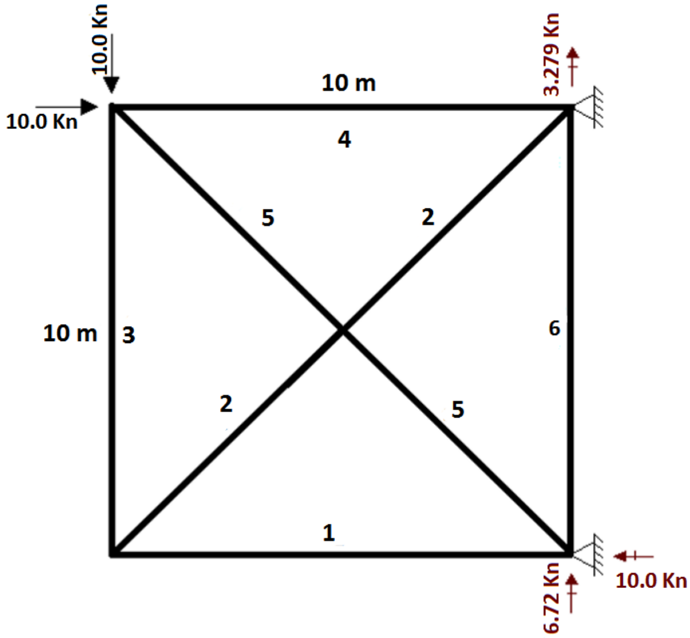

Figura 11: Treliça com as devidas reações de apoio calculada (**Fonte**: própria)

Conclusões

Considerando-se que para uma análise estrutural, o conhecimento dos deslocamentos e das reações de apoio de uma estrutura são de extrema importância. Pois, todo o dimensionamento até a conclusão do projeto estrutural depende destes parâmetros, e observando os resultados obtidos neste trabalho, fica claro que o Método da Rigidez Direta tem êxito na solução de cálculos estruturais e é uma alternativa no estudo das estruturas. Desta forma, o estudo realizado foi aplicado somente para a análise de treliças planas hiperestáticas, porém, é possível a utilização do mesmo para outros tipos de estrutura, tais como vigas e pórticos, e ainda, podendo ser bidimensionais ou tridimensionais, isostáticas ou hiperestáticas.

Cabe ressaltar ainda, como citado anteriormente, que o método apresenta melhor eficiência quando utilizado com auxílio de algum software computacional para executar os cálculos mais extensos, o que manualmente resultaria em uma demanda de tempo maior ou até mesmo seria inviável.

Referências Bibliográficas

SANTOS, L.F.; RODRIGUES, E.C. Aplicação de Álgebra Linear à Engenharia Civil: Análise Estrutural Através de Cálculo Matricial – Formosa, Goiás, 2017.
Luiz F. Martha, Métodos Básicos de Análise de Estrutura – Elsevier: Rio de Janeiro, 2010.
Kummer, F. D.- Análise de pórticos espaciais pelo método da rigidez: Consideração dos efeitos da deformação por corte – Porto Alegre, 2014.
Keneth M. Leet, Chia-Ming Uang, Anne M. Gilbert, Fundamentos da análise estrutural, tradução: João Eduardo Nóbrega Tortello; 3. Ed.; Porto Alegre: AMGH,2010.
Pescador, A; Possamai, J. P; Possamai, C.R- Aplicação de Álgebra Linear na Engenharia Civil- COBENGE,Blumenau, Santa Catarina,2011.
R.C. Hibbeler, Análise de Estruturas, Oitava Edição, Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2013.
R.C. Hibbeler, Resistência dos Materiais, Terceira Edição, Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 2000.