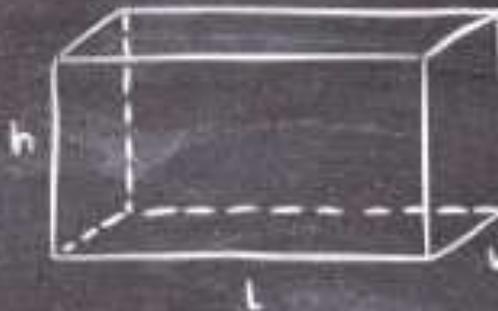


$$y = mx + b$$

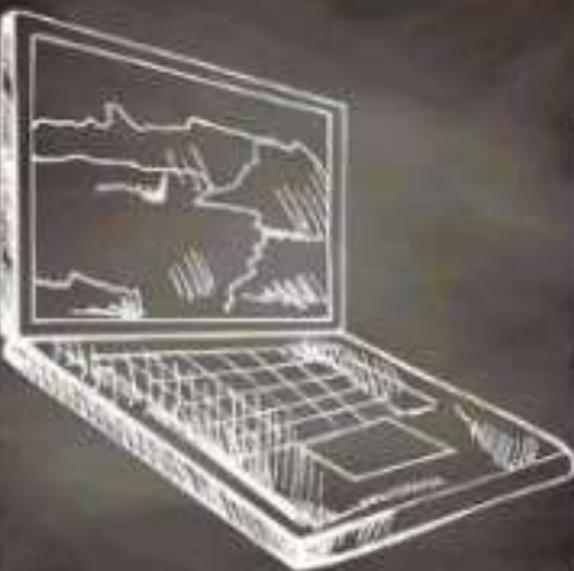


$$V = Lwh$$

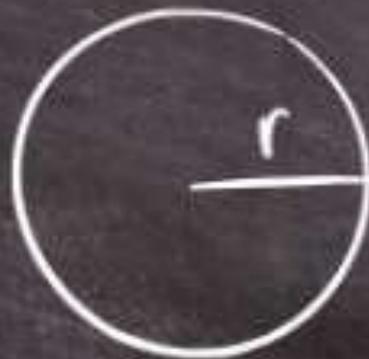
XV SEMAT

Semana da licenciatura em Matemática
AS TECNOLOGIAS COMO FERRAMENTAS
PEDAGÓGICAS

26 a 28 de novembro de 2024



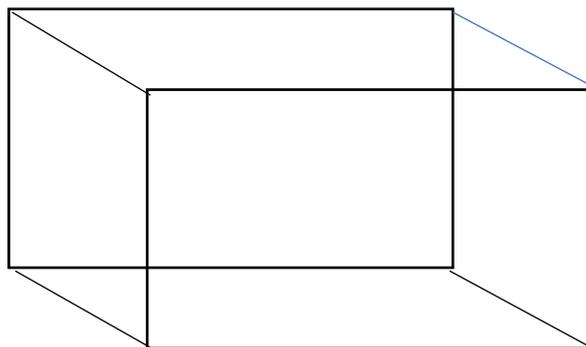
Inscrição



$$C = 2\pi r$$

ANAIIS

ISSN: 2763-8525





**Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Pró-Reitoria de Ensino
Coordenação da Área Acadêmica de Matemática
Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática**

**ANAIS – 15ª Semana da Licenciatura em Matemática do IFG/Campus
Goiânia**

Goiânia, Dezembro 2024

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Pró-Reitoria de Ensino
Coordenação da Área Acadêmica de Matemática
Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática

ISSN: 2763-8529

Comissão Organizadora

Elaine Altino Freire Leite
Hugo Leonardo da Silva Belisário
Márcia do Socorro Borges de Araújo Cardoso
Mariana Bernardes Borges da Cunha (coordenadora)
Maxwell Gonçalves Araújo

Comitê Científico

Aline Mota de Mesquita Assis
Ana Cristina Gomes de Jesus
Elaine Altino Freire Leite (presidente)
Karoline Victor Fernandes
Jolivê Mendes de Santana Filho
José Eder Salvador de Vasconcelos
Márcio Dias de Lima
Nilton Cezar Ferreira

15ª Semana da Licenciatura em Matemática	
Realização:	Coordenação da Área Acadêmica de Matemática Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática Coordenação do Curso de Especialização em Matemática
Apoio:	Direção Geral do Câmpus Goiânia Departamento de Áreas Acadêmicas II
Período:	de 26 a 28 de novembro de 2025
Site:	http://eventos.ifg.edu.br/eventosmatematica

Goiânia, Dezembro 2025

Sumário

Apresentação	6
I Educação Matemática	7
O MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DA ROBÓTICA PEDAGÓGICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL	8
Pedro Victor Vieira de Matos, Duelci Aparecido de Freitas Vaz	8
APLICANDO FUNÇÕES NO ENSINO DA MATEMÁTICA: ENFOQUE NO PROCESSO CRIPTOGRÁFICO	16
Naamã Galdino da Silva Neris	16
DESAFIOS E BARREIRAS DE GÊNERO NA TRAJETÓRIA PROFISSIONAL DE MULHERES NA MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE EM UMA INSTITUIÇÃO DE ENSINO SUPERIOR DE GOIÁS	24
Anna Júlia Alves de Oliveira, Ana Cristina Gomes de Jesus	24
UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ÁREA E PERÍMETRO DE FIGURAS PLANAS PARA ALUNOS DA ZONA RURAL, COM ATIVIDADES	32
Luciano Lopes de Souza, Hiuri Reis	32
II Matemática	38
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM	39
Karoline Victor Fernandes, Ciro Castro De Araujo	39
ÁLGEBRAS QUADRÁTICAS E ÁLGEBRAS ASSOCIADAS A GRAFOS ORIENTADOS EM NÍVEIS	51
José Eder Salvador de Vasconcelos, Karoline Victor Fernandes, Márcio Dias de Lima	51
UMA ABORDAGEM TEÓRICA SOBRE OS CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE SEMIGRUPO NUMÉRICO	63
Naamã Galdino da Silva Neris	63
III Matemática Aplicada	71
ANALISANDO FUNDOS DE INVESTIMENTOS UTILIZANDO A LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO PYTHON	72
Andréia Ribeiro de Faria, Márcio Dias de Lima	72
ANÁLISE DA PRECIPITAÇÃO NAS CAPITAIS DO NORDESTE BRASILEIRO UTILIZANDO A TRANSFORMADA DE HILBERT-HUANG	80
Marluce Roberta Camargo Barbosa, Uender Barbosa de Souza	80

IV	Minicursos	86
	SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES E SUAS APLICAÇÕES EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS	87
	Marcos Roberto Batista	87
	COMPUTAÇÃO ALGÉBRICA PARA LICENCIATURA COM O SOFTWARE MAXIMA	89
	Thiago Vedovatto	89
	INTRODUÇÃO À ROBÓTICA EDUCACIONAL COM ARDUINO: POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA E CIÊNCIAS DA NATUREZA	94
	Gustavo da Silva Mocó	94

Apresentação

É com grande satisfação que apresentamos os anais da Semana da Licenciatura em Matemática, realizada entre os dias 26 e 28 de novembro de 2024. Com o tema “As tecnologias como ferramentas pedagógicas”, o evento reuniu estudantes, professores e pesquisadores em torno de um debate essencial para o futuro do ensino de matemática em Goiás: o papel das novas tecnologias como aliadas na construção do conhecimento matemático.

Durante o evento, tivemos apresentações de trabalhos de grande relevância, que abordaram temas fundamentais nas áreas de matemática, educação matemática e matemática aplicada. Entre os tópicos discutidos, destacaram-se estudos sobre a pandemia de COVID-19, a representatividade feminina nos cursos de matemática e no exercício da profissão de professora de matemática, o uso de tecnologias no ensino, e as diversas aplicações da matemática em diferentes campos do conhecimento.

Além das apresentações de trabalhos acadêmicos, o evento contou com palestras de especialistas renomados da região Centro-Oeste, que enriqueceram as discussões e compartilharam suas experiências. A participação ativa dos estudantes nas sessões orais, minicursos, palestras, na organização e em atividades variadas demonstrou o engajamento e o compromisso com a formação e o fortalecimento da comunidade acadêmica local.

A Semana da Licenciatura em Matemática cumpre um papel fundamental para o ensino de matemática no estado de Goiás. Ao proporcionar um espaço de discussão e aprendizado, o evento promove o desenvolvimento de novas abordagens pedagógicas, o incentivo à pesquisa, e o fortalecimento do vínculo entre teoria e prática. Estamos certos de que esses momentos de intercâmbio e reflexão contribuem significativamente para a qualidade do ensino de matemática e para a formação de educadores comprometidos com a inovação e o ensino de excelência.

Parte I

Educação Matemática



O MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DA ROBÓTICA PEDAGÓGICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL

Pedro Victor Vieira de Matos (Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia.
pedrovdms@gmail.com)

Duelci Aparecido de Freitas Vaz (Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia.
duelci.vaz@gmail.com)

Resumo

Este trabalho visa apresentar brevemente o movimento lógico-histórico da robótica pedagógica cuja base está no materialismo histórico-dialético, sendo aproveitado a tese de doutorado de Luso Soares Madureira (2021), analisando como tem sido abordada e utilizada a Robótica Pedagógica na perspectiva da teoria histórico-cultural nas pesquisas em educação matemática e no contexto da educação matemática publicadas em 2002 a 2020. Sendo este artigo parte de uma pesquisa final desenvolvida dentro do PIBIC – IFG, como forma a colaborar para fins educacionais. Espera-se com este artigo, revelar a robótica pedagógica em toda sua essência através do movimento lógico-histórico, desde seu início, até a contemporaneidade.

Palavras-chave: Robótica Pedagógica; Tecnologias; Educação Matemática; Teoria Histórico-Cultural.

1 Introdução

No século XX, especialmente a partir de sua segunda metade, observa-se a crescente inserção de tecnologias no campo educacional, marcada pela introdução de computadores e outros dispositivos digitais. Madureira (2021) afirma que a história das transformações tecnológicas não ocorreu de forma aleatória, mas é fruto das ações e interações humanas voltadas à produção e modificação do ambiente em que vive. Esse processo é marcado por contradições que revelam disputas sociais e refletem as intenções dos grupos hegemônicos quanto ao uso das tecnologias em diferentes períodos históricos, com ênfase no contexto educacional escolar.

A introdução da robótica na educação tem emergido como uma inovação significativa,



promovendo a integração de artefatos robóticos como ferramentas de ensino. Teles e Fernandes (2024) destacam que essa abordagem, ao favorecer uma aprendizagem mais criativa e envolvente, tem ganhado espaço tanto no Ensino Superior quanto na Educação Básica. Contudo, há um certo fascínio associado a essa tecnologia digital, cuja finalidade é não apenas estimular a motivação dos alunos, mas também contribuir para a evolução das práticas educativas, oferecendo novas formas de interação e aprendizado.

A robótica pedagógica, fundamentada nos princípios da teoria histórico-cultural, apresenta-se como uma abordagem promissora para a análise desse fenômeno. Essa teoria permite o desenvolvimento de estudos que enfatizam a historicidade dos fatores sociais e culturais que envolvem o objeto, destacando as diversas formas de pensar e agir ao longo do tempo. Nesse contexto, Zanatta e Brito (2015) relata que a apropriação das tecnologias digitais ocorre apenas quando se aprende a utilizá-las de acordo com o uso social para o qual foram originalmente concebidas.

Logo, a Teoria Histórico-Cultural propõe uma perspectiva psicológica que enfatiza o papel central das interações sociais e culturais no desenvolvimento humano. Essa abordagem sugere que o indivíduo se forma e se desenvolve a partir de sua inserção em um contexto histórico e social específico, sendo que as práticas culturais, os instrumentos simbólicos e os sistemas de signos, como a linguagem, são mediadores fundamentais desse processo como é ressaltado em Oliveira (1997). Assim, o desenvolvimento humano não é visto como um processo isolado, mas como resultado da construção ativa do sujeito em constante interação com o ambiente sociocultural.

Este trabalho se orienta na seguinte questão norteadora: Como tem sido abordada e utilizada a Robótica Pedagógica na perspectiva da teoria histórico-cultural em educação matemática? Para responder essa pergunta, esta pesquisa se constitui de caráter bibliográfico com objetivo de fazer uma análise crítica sobre o uso da Robótica Pedagógica na Educação Matemática na Educação Básica pautada nas concepções da Teoria Histórico-Cultural.

2 A Robótica Pedagógica e a Teoria Histórico-Cultural

A Teoria Histórico-Cultural (THC) elaborada por estudiosos, constitui uma abordagem psicológica que destaca a influência crucial do contexto social e cultural no processo de desenvolvimento humano. Esta perspectiva tem suas origens na obra do psicólogo russo Lev



Semionovitch Vygotsky, que viveu nos primórdios do século XX e é amplamente venerado como um dos precursores da psicologia histórico-cultural.

Oliveira (1997) destaca a importância que Vygotsky atribui ao papel do outro social no desenvolvimento dos indivíduos encapsulada na formulação de um conceito específico dentro de sua teoria, essencial para a compreensão de suas ideias sobre as relações entre desenvolvimento e aprendizado.

Um estudo de destaque que Vygotsky desenvolveu dentro da THC foi conceito de zona de desenvolvimento proximal que

[...] é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (Vygotsky, 1995, p. 112).

Ou seja, o progresso mental já alcançado é representado pelo nível de desenvolvimento real, olhando para trás, enquanto o potencial de desenvolvimento mental futuro é delineado pela zona de desenvolvimento proximal.

Alguns dos estudos de Vygotsky, enfatizam a importância do pensamento e da linguagem. Como aponta Oliveira (1997, p. 42) “[...] a linguagem é o sistema simbólico de todos os grupos humanos, a questão do desenvolvimento da linguagem e suas relações com o pensamento ocupa lugar central na obra de Vygotsky.” Outro princípio fundamental da teoria de Vygotsky é a mediação. Ele defendia que a relação entre o indivíduo e o mundo é mediada por sistemas simbólicos, como a linguagem (Oliveira, 1997). Vygotsky via a linguagem como um instrumento fundamental para o desenvolvimento do pensamento e da consciência, sendo um meio pelo qual a cultura e a sociedade influenciam a mente humana (Oliveira, 1997).

Dessarte, considerando a educação como um instrumento de reprodução e sistematização cultural, observa-se que ela é diretamente influenciada pela sociedade circundante. Logo a inserção da tecnologia na educação exemplifica essa influência, promovendo uma transformação nos métodos de ensino e aprendizado, contradizendo os estudos e colocando a tecnologia no centro das ações do professor, visando ao tecnocentrismo.

A inserção da tecnologia no campo educacional começou a ganhar destaque a partir da segunda metade do século XX, com a introdução de computadores e outras ferramentas digitais nas salas de aula. Inicialmente, esses recursos eram utilizados principalmente para fins



administrativos e de pesquisa. No entanto, com o avanço da informática e a disseminação da internet nas décadas de 1990 e 2000, a utilização de tecnologias educacionais expandiu-se significativamente.

Seymour Papert desenvolveu a primeira linguagem de programação LOGO em 1968 no Instituto de Tecnologia de Massachusetts nos Estados Unidos da América (EUA) e “foi o pioneiro em utilizar a robótica para fins educacionais” (Gonçalves, 2007, p. 21, apud Barbosa *et al.*, 2018, n.p.). Observa-se que o início das pesquisas sobre o uso de computadores nas escolas, isto é, tecnologias computacionais, foi significativamente influenciado por Papert. Como consequência, a disseminação das ideias de robótica educacional teve início por meio de suas iniciativas em 1975 (Barbosa *et al.*, 2018). Ele acreditava em uma ideia equivocada em que através de sua teoria construtivista¹, a criança poderia se desenvolver sozinha, utilizando um instrumento, nesse caso um instrumental computacional. Por isso esta pesquisa apoia-se nas ideias de Vygotsky (2007) em que ele afirma ser necessário uma pessoa mais experiente para atuar na zona de desenvolvimento proximal do outro indivíduo.

Conforme mencionado anteriormente, o avanço das tecnologias digitais tem provocado um certo fascínio entre os indivíduos em relação às interações sociais. Esse fascínio resulta em uma postura acrítica, na medida em que a novidade tecnológica pode obscurecer o julgamento crítico e reflexivo dos usuários (Vieira Pinto, 2005).

Assim, a percepção que se tem desse fascínio é resultante de uma convergência de fatores artificiais e ideológicos, fundamentados em uma lógica instrumental, que tende a obscurecer a dimensão social humana inerente à tecnologia. Como consequência disso, Madureira (2021) evidencia que uma das estratégias atualmente em destaque é o consumismo tecnológico, cujo objetivo central é redirecionar periodicamente o foco do suposto fascínio, promovendo a substituição contínua e frequentemente desnecessária dos artefatos técnicos. Esse fascínio se faz em virtude da segregação dos homens ao mundo em que estão inseridos.

Feenberg (2010), afirma que a filosofia da tecnologia negligenciou o fato de que a tecnologia é, essencialmente, um artefato sociocultural e, portanto, não está isenta de

¹ A abordagem construtivista incorpora princípios explicativos relativos à natureza social e à função socializadora da escola, ao papel do docente e aos conteúdos curriculares, bem como aos processos de construção, modificação e reorganização dos esquemas e significados do conhecimento. Esta perspectiva tem se constituído em um referencial significativo na transição de uma formação profissionalizante ou tecnocientífica para uma educação que visa à transformação da realidade (Salvador, 2000).



influências históricas, políticas e culturais. Dessa forma, os indivíduos tendem a perder a consciência histórica dos acontecimentos, resultando na perda do significado coletivo, social e histórico das produções por eles construídas (Vieira Pinto, 2005).

No entanto, como forma de superar todo esse fascínio, Madureira (2021, p. 43-44) afirma que “o pensamento histórico e dialético pode ser um caminho possível para a superação e o enfrentamento desse suposto embasbacamento acerca da tecnologia”. Destarte, o pensamento dialético promove uma compreensão da realidade em sua historicidade, permitindo a construção de argumentos substanciais que auxiliam na superação de impressões superficiais sobre o tema (Madureira, 2021).

Partindo da ideia de que o pensamento dialético, junto com a compreensão do contexto histórico, para promover uma superação desse maravilhamento superficial, em relação as tecnologias, há a necessidade de revelar que as ferramentas pedagógicas são formadas pelos indivíduos, através do acúmulo de conhecimento, e a depender de suas necessidades, mas são produzidas num campo de disputa, onde muitas vezes tais tecnologias não favorecem as classes menos abastadas.

Uma proposta relevante é o movimento lógico-histórico do desenvolvimento do objeto de estudo para mostrar o real motivo da sua criação e relação social com a cultural e a lógica de sua transformação, relacionada ao mundo do trabalho, portanto, por detrás sempre se esconde a exploração do homem pelo homem, sendo assim, o fim não é o homem, mas sim o capital (Davydov, 1988). Sendo assim, o desenvolvimento dos seres humanos, está especificamente ligado às transformações dos recursos que são encontrados na natureza, logo pode-se dizer que a história da tecnologia compõe a história dos indivíduos.

Assim sob a perspectiva da Teoria Histórico-Cultural, visa compreender tanto o objeto de estudo – a robótica quanto as formas adequadas de aplicação e desenvolvimento dessa tecnologia no ambiente escolar. Em virtude disso, a compreensão das tecnologias como instrumentos culturais, fundamentada na teoria histórico-cultural, configura-se como uma abordagem para a investigação e análise desses fenômenos, sendo assim, ao aplicar a robótica pedagógica na educação básica, é crucial adotar uma abordagem crítica fundamentada na teoria histórico-cultural, considerando as formas de pensar e agir no mundo concretamente.

Na perspectiva crítica da Teoria Histórico-Cultural elaborada por Vygotsky (2007) dentre outros estudiosos como já citado, a robótica pedagógica na educação básica deve ser



entendida como uma ferramenta que vai além da mera instrução técnica, promovendo uma reflexão sobre o papel da tecnologia na sociedade e nas práticas educacionais. Concernente a isso, a compreensão dos processos que ocorrem dentro e fora do ambiente escolar é fundamental para qualquer análise das implicações do uso de novas tecnologias na educação.

Nesse contexto, a integração da Educação Matemática, como também em outras áreas de ensino, com o uso de Tecnologias Digitais no ambiente escolar, pode atuar como um catalisador para a promoção da inclusão social e o exercício pleno da cidadania. De modo que a maneira como o professor incorpora a Robótica Pedagógica na escola pode influenciar de forma significativa, positiva ou negativa, a dinâmica do ensino, considerando o contexto da sala de aula, o comportamento dos alunos e a dimensão afetiva da relação professor-aluno. Quando implementada e compreendida de forma consciente, essa abordagem tem o potencial de desafiar o modelo tradicional de ensino centrado no professor, promovendo o aprendizado dos alunos. No entanto, o uso inadequado pode não produzir os mesmos benefícios. Sob essa perspectiva Souza e Castro (2022) apontam que a simples inserção da Robótica Pedagógica na sala de aula não assegura, por si só, um ensino inovador, mas que a eficácia dessa tecnologia depende da maneira como é utilizada, dessa forma se for mal implementada, a partir de uma visão tecnocêntrica ela pode perpetuar métodos de ensino tradicionais e repetitivos, em vez de promover práticas pedagógicas inovadoras.

3 Considerações Finais

A análise apresentada ao longo deste trabalho evidenciou a relevância da robótica pedagógica como ferramenta de apoio no processo educacional, mas destacou a importância de uma abordagem crítica e reflexiva sobre seu uso. A partir dos pressupostos da teoria histórico-cultural, foi possível compreender que a tecnologia, incluindo a robótica, não deve ser vista como um fim em si mesma, mas como um meio que deve estar alinhado ao contexto social e cultural no qual está inserida. O instrumentalismo e tecnocentrismo presentes em muitas das teses e dissertações analisadas por Madureira (2021), reforçam uma visão limitada da tecnologia, ao considerá-la neutra e autônoma, o que desvaloriza o papel do sujeito que a utiliza e a cria.

Dessa forma, os modos de pensar historicamente produzidos e qualificados devem fazer parte do contexto escolar, pois permitem ao indivíduo alcançar ascensão social, obter



representatividade e ser respeitado, especialmente em uma sociedade como a nossa. Portanto, a relevância e contribuição da Teoria Histórico-Cultural residem na possibilidade de permitir que os indivíduos, especialmente os estudantes, se apropriem da experiência histórica da humanidade, que chega até nós de forma depurada e qualificada, por meio de atividades educacionais estruturadas.

5 Referências

DAVYDOV, Vasily Vasilovich. A atividade de estudo no primeiro período escolar. In: DAVYDOV, V. V. **Problemas do ensino desenvolvimental**: a experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia. Trad. José Carlos Libâneo e Raquel Aparecida Marra da Madeira Freitas. Textos publicados na Revista Soviet Education, August/Vol. XXX - N° 8, 1988, sob o título: “Problems of Developmental Teaching. The Experience of Theoretical and Experimental Psychological Research - Excerpts”, de V.V. Davydov”, a partir do original russo.

FEENBERG, Andrew. O que é a filosofia da tecnologia? In: NEDER, Ricardo T. In: NEDER, Ricardo T. (Org.). **A teoria crítica de Andrew Feenberg**: racionalização democrática, poder e tecnologia. Brasília: Observatório do Movimento pela Tecnologia Social na América Latina / CDS / UnB / Capes, 2010. p. 50-65.

KOPNIN, Pavel **Vasilyevich**. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Tradução Paulo Bezerra. Coleção Perspectivas do Homem, Volume 123. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

MADUREIRA, Luso Soares. **Robótica pedagógica nos programas de pós-graduação em educação do Brasil: um retrato em movimento**. 2021. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2021. 193 f.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. **Vygotsky**: aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione. 1997.

PIRES, Marília Freitas Campos. O Materialismo Histórico-Dialético e a Educação. Interface – Comunicação, Saúde, Educação, v. 1, n. 1, 1997. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S1414-32831997000200006>. Acesso em: 15 out. 2024.

SALVADOR, CC. **Psicologia do ensino**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul; 2000.

SOUSA, Angélica Silva de; OLIVEIRA, **Guilherme Saramago de**; ALVES, **Laís Hilário**. **A Pesquisa Bibliográfica: Princípios e Fundamentos**. Caderno da FUCAMP, v. 20, n. 43, 8 mar. 2021. Disponível em: <https://revistas.fucamp.edu.br/index.php/cadernos/article/view/2336>. Acesso em: 15 out. 2024.



SOUZA, Maria Silvania Marques Xavier de; CASTRO, Juscileide Braga de. **O uso da Robótica no Ensino e na Aprendizagem da Matemática:** uma Revisão Sistemática de Literatura. Revista Insignare Scientia - RIS, v. 5, n. 4, p. 55-76, 21 dez. 2022.

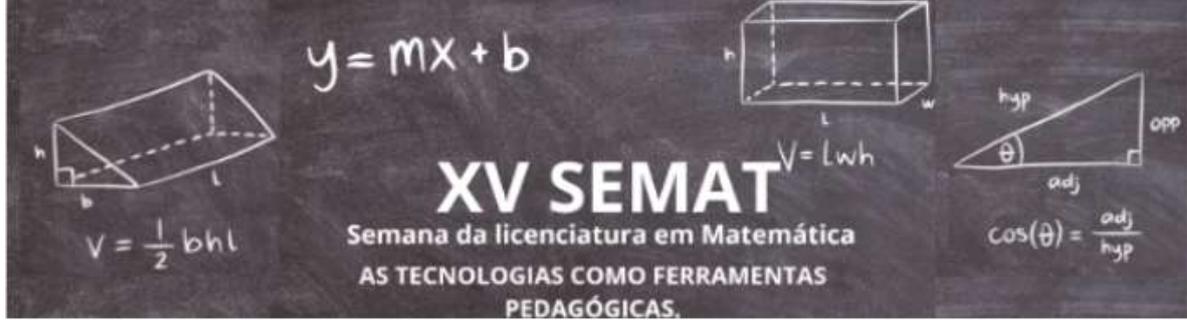
TELES, Maria Estely Rodrigues; FERNANDES, Jarina Rodrigues. **Robótica pedagógica na educação infantil:** história, conceito e pesquisas. Anais CIET:Horizonte, São Carlos-SP, v. 7, n. 1, 2024. Disponível em: <https://ciet.ufscar.br/submissao/index.php/ciet/article/view/2657>. Acesso em: 4 set. 2024.

VIEIRA PINTO, Álvaro. **O conceito de tecnologia.** Vol. 1. Rio de Janeiro: Contraponto, 2005.

VIGOTSKY, Lev Semyonovich. **A formação social da mente:** o desenvolvimento social da mente. São Paulo: Martins Fontes, 2007. Disponível em: <https://ria.ufrn.br/jspui/handle/123456789/1227>. Acesso em: 24 jun. 2024.

VYGOTSKY, Lev Semionovich. **Obras escogidas.** Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores. Madrid: Visor; MEC, 1995. v.3, p.11-340.

ZANATTA, Beatriz Aparecida; BRITO, Maria Aparecida Candine de. **Mediação pedagógica com uso das tecnologias digitais na educação.** Revista Educativa - Revista de Educação, Goiânia, Brasil, v. 18, n. 1, p. 8-23, 2015. DOI: 10.18224/educ.v18i1.4248.



APLICANDO FUNÇÕES NO ENSINO DA MATEMÁTICA: ENFOQUE NO PROCESSO CRIPTOGRÁFICO

Naamã Galdino da Silva Neris

(Instituto Federal de Goiás/Câmpus Goiânia - naama.neris@ifg.edu.br)

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar um estudo de funções afins e exponenciais ao tema Criptografia, permitindo sua aplicabilidade nas codificações e/ou decodificações de mensagens. Pretendo apresentar um breve histórico dessa área, abordando os principais acontecimentos ao longo do tempo e alguns cientistas que foram fundamentais na evolução da Criptografia. Serão abordadas as definições de diversas ciências tais como, Esteganografia, Criptografia e Criptoanálise, que foram precípuas para o avanço da informação.

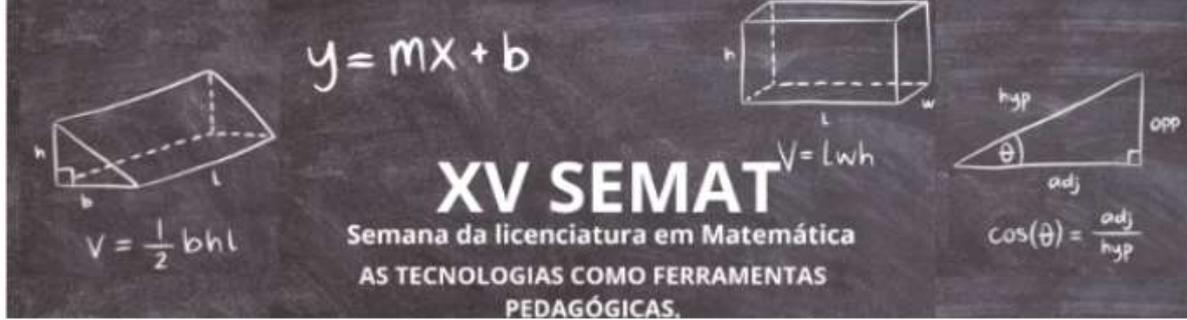
Palavras-chave: CRIPTOGRAFIA. MATEMÁTICA. FUNÇÕES. ENSINO.

1 Considerações iniciais

O ser humano tem uma necessidade inata de se comunicar. Desde a antiguidade, o homem desenvolve técnicas que o auxiliam a expressar suas crenças e ideologias.

No princípio, o homem da caverna se comunicava por meio de gritos, gestos e grunhidos. Com o tempo, esse tipo de manifestação linguística evoluiu, facilitando a comunicação não só entre os povos de uma mesma tribo, como também entre tribos diferentes. Nesse período, já se registravam as primeiras pinturas nas cavernas, conhecidas como pinturas rupestres.

Aproximadamente no ano de 4000 a.C., surgiu a escrita, um instrumento comunicativo que deixou para trás formas simples e primitivas do uso da linguagem. Com o advento da escrita, o homem sentiu a necessidade de guardar segredos. Tão forte quanto à precisão de ocultar informações sigilosas, era a premência de desvendar esses segredos. Os codificadores se empenhavam na criação de códigos cada vez mais resistente à intervenção alheia, ao passo que os decodificadores tornavam esses mecanismos mais eficazes, ambos utilizando a Matemática e diversas outras ciências na criação e/ou descoberta dos códigos.



Diante da inevitabilidade de se produzir mecanismos capazes de salvaguardar as informações sigilosas, bem como de proteger os dados armazenados e transmitidos pelas organizações, surgiu a Criptografia - ciência que estuda os princípios e as técnicas de cifrar e codificar uma mensagem que permuta da forma original para uma ilegível.

2 Desenvolvimento

O marco principal da Criptografia se deu com o surgimento da Revolução Industrial, em meados do século XIX, período este que trouxe a mecanização dos meios de produção, contribuindo assim para o desenvolvimento tecnológico e, conseqüentemente, da informação. Este trabalho é baseado em (Galdino, 2015) com a abordagem histórica fornecida por (Tkotz, 2015) e o referencial teórico de (Iezzi; Dolce; Murakami, 1977) e (Iezzi; Murakami, 1977).

2.1 Contexto Histórico

O interesse pelos estudos criptográficos remonta no século 4000 a.C.. O primeiro registro documentado dessa ciência aconteceu no Antigo Egito, numa vila chamada Menet Khufu, no túmulo de Khnumhotep II. Por volta de 1900 a.C., um membro da nobreza egípcia usou hieróglifos incompreensíveis (Criptografia) para omitir informações relevantes à população.

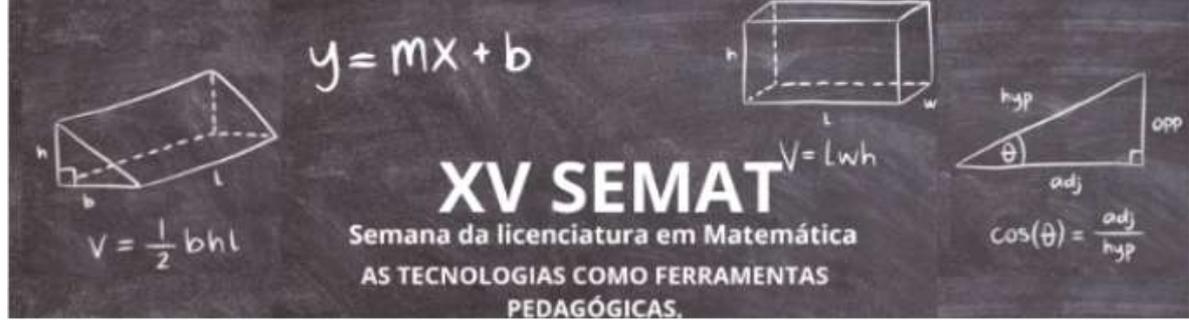
Na Antiguidade, inúmeras cifras foram criadas com o intuito de ocultar mensagens. Entre as mais importantes, destacam-se a Atbash, a Albam e a Atbah, as chamadas cifras hebraicas, usadas pelos escribas hebreus. Essas cifras são consideradas reversíveis, pois são aplicadas tanto no processo de codificação quanto no de decodificação de um texto.

Outra cifra que tornou-se conhecida e é importante até os dias de hoje é a Cifra de César. O nome desse método foi em homenagem ao líder militar Caio Júlio César que usava o método para comunicar-se com os seus generais. Esse método que é semelhante com as cifras hebraicas utiliza-se as cifras de substituição em uma sequência já pré-estabelecida. A tabela seguinte, mostra a conversão do alfabeto simples no alfabeto em cifra.

Figura 1: Cifra de César

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c

Fonte: Ensino de Potência



Às vezes, o processo de codificar na Cifra de César se alternava. No lugar de substituir a ordem das letras, eram trocadas o tipo de alfabeto, de letras latinas por letras gregas, dificultando ainda mais a maneira de decifração. A Cifra de César continua sendo usada até os dias atuais, sendo a única da Antiguidade.

Já no século IX foi dada a primeira explicação bem documentada da análise de frequência pelo filósofo árabe Al-Kindi, método que consiste em indicar a ocorrência de letras ou palavras em um determinado texto. Nesse método, que é o marco histórico para o nascimento da Criptoanálise, é analisada a frequência relativa de cada letra.

Em 1411, foram criadas as Cifras Homofônicas. Essas cifras tinham a finalidade de suprimir a análise de frequência desenvolvida por Al-Kindi. O objetivo dessas cifras não eram apenas substituir uma letra por um símbolo, mas trocar uma letra por vários símbolos.

Por volta de 1460, Leon Battista Alberti, considerado símbolo da Renascença italiana, criou a primeira cifra polialfabética, que mais tarde serviu como alicerce para outros pesquisadores que utilizaram suas ideias. Sua invenção, o disco de cifra ou cifrante, ficou conhecido como o Disco de Alberti.

Famoso por ser considerado o pai da Álgebra Moderna, François Viète (1540-1603) foi um renomado criptoanalista da sua época. Com grande experiência em decifrar códigos, Viète em 1599 criou a cifra de Sully, que tinha como pretensão, não ter a cifra descoberta por ninguém.

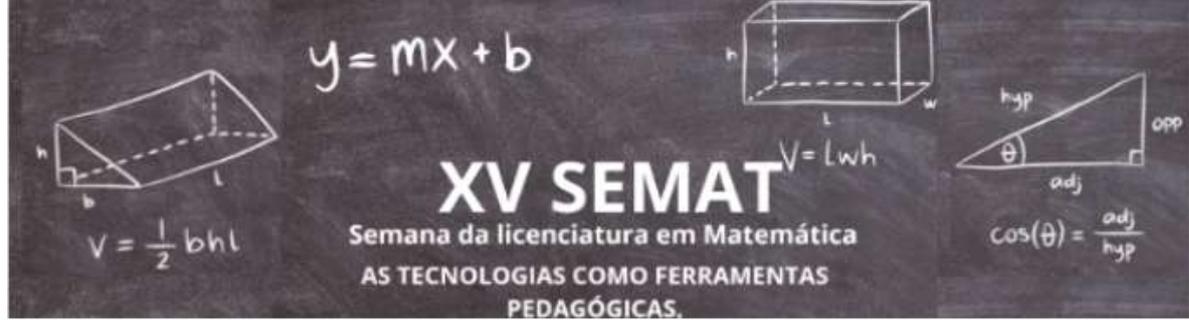
Thomas Jefferson foi o inventor do cilindro cifrante ou cifra de roda. Tal invenção não chegou a ser utilizada no século XIX, mas sim no século posterior, em prol dos militares durante as guerras mundiais.

Samuel Morse um norte-americano apaixonado pela arte, inventou o telégrafo, um importante dispositivo que ocasionou uma revolução no sistema de comunicação do século XIX.

Em 1920 foram desenvolvidas máquinas com o objetivo de criar cifras altamente complexas. Essas cifras foram quebradas por Frederick. Devido a sua eficácia em decodificar cifras, Frederick tornou-se professor de Criptologia.

O engenheiro Arthur Scherbius patenteou a máquina Enigma após a Primeira Guerra Mundial. Depois de ter tido a máquina rejeitada, ele a considerou segura, mas não necessária de tráfego de informações. Scherbius a aperfeiçoa e consegue finalmente vendê-la para o exército alemão. Estima-se que foram produzidas 100 mil máquinas Enigma antes e durante a Segunda Guerra Mundial. Enigma foi a máquina de cifragem mais utilizada nesse período, mesmo outras máquinas tendo sido criadas e pouco conhecidas.

O código foi, no entanto, decifrado e, a informação contida nas mensagens é tida como responsável pelo fim da Segunda Guerra Mundial.



2.2 Criptografia

Na Antiguidade, o surgimento da escrita (4000 a.C.) e, o aparecimento dos primeiros símbolos, foram processos precípuos para a interação e/ou comunicação entre as pessoas.

Com o aparecimento da escrita e, conseqüentemente, com sua evolução, os primórdios perceberam a necessidade de guardar segredos. Diante de tais necessidades, surgiram as primeiras escritas hieroglíficas, registros que tinham o intuito de ocultar mensagens ultrassecretas à população.

A ocultação de mensagens era feita por meio do processo conhecido como Esteganografia. Etimologicamente a palavra “Esteganografia” deriva do grego (**steganos** = coberto e **graphien** = escrever). Esse método, usado pela primeira vez no século V a.C. na obra “As Histórias” de Heródoto, consiste em ocultar a existência de uma mensagem.

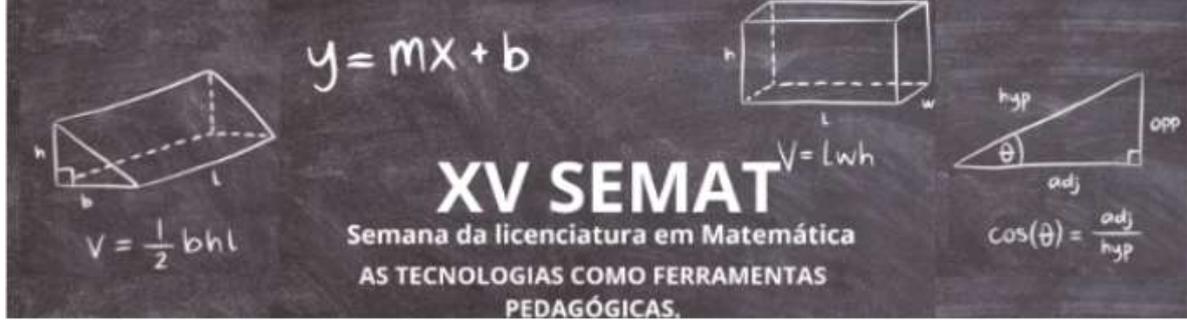
O processo da escrita passou por constantes evoluções e transformações até chegar ao seu apogeu na Idade Antiga, meados do século VIII a.C.. No início do surgimento da escrita, um número ínfimo de pessoas sabia escrever. Nesse período, que compreende o ano de 4000 a. C., a esteganografia era pouco utilizada pela população. Mas no momento em que a primeira mensagem cifrada aparece, surge a Criptografia, método bastante utilizado durante as guerras militares.

Atualmente, a Criptografia representa a transformação de informação inteligível numa forma aparentemente ilegível, a fim de ocultar informação de pessoas não autorizadas, garantindo privacidade. A palavra Criptografia tem origem grega (**Kryptós** = escondido, oculto e **gráphien** = grafia) e define a arte ou ciência de escrever em cifras ou em códigos, utilizando um conjunto de técnicas que torna uma mensagem incompreensível, chamada comumente de texto cifrado, através de um processo chamado cifragem, permitindo que apenas o destinatário desejado consiga decodificar e ler a mensagem com clareza, no processo inverso, a decifragem.

No estudo da Criptografia, as pessoas capazes de codificar uma mensagem são chamadas de criptógrafos, pois elas possuem habilidades de transformar um texto simples em um texto cifrado. Já os criptoanalistas apenas decodificam os textos cifrados. A criptoanálise é o conjunto de técnicas e métodos para decifrar uma escrita de sistema desconhecido. Os criptógrafos e os criptoanalistas colaboraram com o desenvolvimento gradual da Criptografia e, foram indispensáveis durante as guerras militares, colocando suas inteligências a serviço dos reis.

Com o passar do tempo, a Criptografia deixou de estar apenas nas escritas cifradas e invadiu os meios de comunicação tecnológicos, sendo fundamental na vida do ser humano. Em suma, a Criptografia possui quatro objetivos, a saber:

1. Confidencialidade: o conteúdo da informação tem que ser mantida em sigilo para todas



as pessoas, exceto ao destinatário;

2. Integridade da informação: o destinatário deve assegurar que a mensagem não sofreu alterações durante a transmissão;
3. Autenticação de informação: o receptor tem que identificar com capacidade o emissor da mensagem e, que o próprio enviou a mensagem;
4. Não repúdio: em hipótese alguma o emissor ou receptor deverá negar o envio ou a recepção da informação.

Ao longo do tempo, inúmeras cifras têm sido utilizadas na Criptografia. As cifras podem ser classificadas de acordo com suas funcionalidades: cifras de substituição e cifras de transposição.

A *cifra de substituição* é um método criptográfico que funciona de acordo com um sistema pré-definido. As letras do texto original, tratadas individualmente ou em grupos de comprimento constante são substituídas por outras letras, figuras ou símbolos para produzir os criptogramas. As cifras de substituição podem ser classificadas em: *Polialfabéticas* (utiliza-se mais de um alfabeto cifrante para substituir as letras de uma única mensagem) e *monoalfabéticas* (utiliza-se apenas um alfabeto cifrante para codificar um texto).

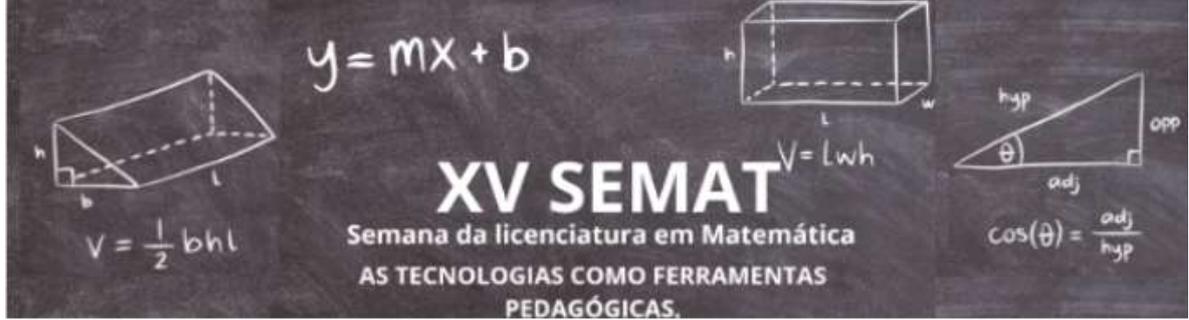
Baseado no princípio matemático da permutação, as *cifras de transposição* também são métodos criptográficos, tratados individualmente ou em grupos de comprimento constante, no qual as letras do texto original são mudadas de posição de acordo com um sistema pré-definido. Matematicamente trata-se da aplicação de uma função bijetiva para cifrar e da respectiva função inversa para decifrar. Esse método não é muito seguro em se tratando de mensagens curtas, pois existem poucas possibilidades para organizar as letras.

2.3 Funções no ensino da Matemática: uma abordagem criptográfica

O interesse pelos números e cálculos matemáticos deu-se pela necessidade dos povos antigos em registrar acontecimentos naturais. Esse interesse propiciou o desenvolvimento da Matemática e, conseqüentemente, da Criptografia.

As funções matemáticas desempenham um papel crucial na Criptografia, servindo como a base para a segurança de sistemas de comunicação e armazenamento de dados. O desenvolvimento contínuo de novas funções e algoritmos é essencial para enfrentar os desafios emergentes em segurança da informação.

Encontrar uma função bijetiva f entre um conjunto de mensagens escritas em um determinado alfabeto cifrante para um conjunto de mensagens codificadas é intuitivamente o princí-



pio básico da Criptografia. Temos a garantia que f é inversível, logo existe a possibilidade da decifração da mensagem. Entretanto, a inversão de f que é o grande segredo da Criptografia.

Para entendermos a ideia do processo criptográfico, analisaremos um diagrama abaixo, onde se relaciona letras e números.

Figura 2: Relação de letras e números

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Fonte: Tabela elaborada pelo autor

2.3.1 Função Afim

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é chamada de *função polinomial do 1º grau* ou *função afim*.

Escolheremos uma função f que irá receber o valor da letra (domínio) que queremos transmitir e, conseqüentemente, gerará outro valor através de $f(x)$. A imagem de f , será o valor transmitido. Para decodificar a mensagem basta aplicar a função inversa de f , isto é,

$$f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}.$$

No exemplo abaixo, a função cifradora será $f(x) = 5x + 4$. A palavra que será transmitida pelo emissor é **CRIFTOGRAFIA**. De acordo com a figura 2, temos a seguinte correspondência:

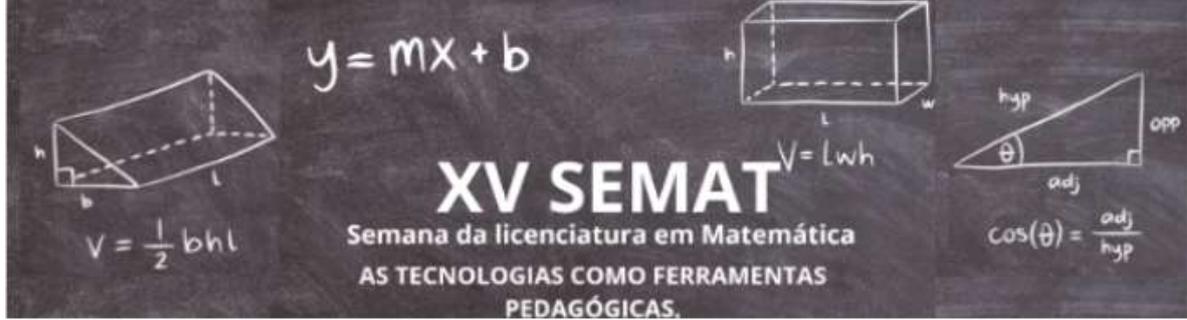
Figura 3: Correspondência

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
C=3	f(3)=19	P=17	f(17)=89	G=7	f(7)=39	F=6	f(6)=34
R=18	f(18)=94	T=20	f(20)=104	R=18	f(18)=94	I=9	f(9)=49
I=9	f(9)=49	O=15	f(15)=79	A=1	f(1)=9	A=1	f(1)=9

Fonte: Tabela elaborada pelo autor

Codificando a palavra **CRIFTOGRAFIA**, temos a seguinte sequência numérica

19 94 49 89 104 79 39 94 9 34 49 9



que é a imagem da função. Através da aritmética módulo 26, obtemos a codificação sob o seguinte anagrama

S P W K A M P I H W I.

Para decodificar a palavra **SPWKAMPIHWI**, o receptor realizará a operação inversa da função $f(x) = 5x + 4$ dada por $f^{-1}(x) = \frac{x - 4}{5}$. Por exemplo, pela figura 2, $S = 19$, isto é, $x = 19$. Logo, $f^{-1}(19) = 3$. Portanto, a letra que corresponde à S é a letra C . Fazendo todos os cálculos, o receptor consegue recompor totalmente a mensagem original.

2.3.2 Função Exponencial

Dado um número real a , tal que $0 < a \neq 1$, chamamos **função exponencial** de base a a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $g(x) = a^x$. A inversa da função exponencial é a função logarítmica, isto é, $g^{-1}(x) = \log_a x$.

Considere $g(x) = 3^x$. A palavra que iremos criptografar será **MÉTODO**. De acordo com a figura 2, temos a seguinte correspondência:

Figura 4: Correspondência

x	g(x)	x	g(x)
M=13	$g(13)=1594323$	O=15	$g(15)=14348907$
E=5	$g(5)=243$	D=4	$g(4)=81$
T=20	$g(20)=3486784401$	O=15	$g(15)=14348907$

Fonte: Tabela elaborada pelo autor

A sequência numérica obtida pela imagem da função, para cada letra que corresponde a um número, constitui a codificação da palavra.

Para decodificar a palavra, basta realizar a operação inversa da função $g(x) = 3^x$ dada por $y := g^{-1}(x) = \log_3 x$. Por exemplo, para $x = 1594323$ temos que $y = \log_3 1594323$. Assim, $3^y = 1594323$ o que implica $3^y = 3^{13}$. Logo, $y = 13$ e, portanto, a letra correspondente a $x = 1594323$ é à letra M .

Fazendo esse cálculo para todas as letras, decodifica cada letra do texto cifrado e consegue recompor totalmente a mensagem original.



3 Considerações finais

O estudo de funções no contexto criptográfico destaca-se pela segurança e integridade das informações. Funções matemáticas, como as funções afins e exponenciais, são fundamentais para a codificação e decodificação de mensagens, garantindo que os dados sejam transmitidos de forma segura.

Além disso, o entendimento dessas funções permite uma melhor apreciação dos princípios teóricos que sustentam os algoritmos criptográficos, contribuindo para a formação de habilidades essenciais no campo da segurança da informação.

Com o objetivo de garantir a confidencialidade, autenticidade, integridade e não repúdio, o uso da Criptografia tornou-se imprescindível na vida do ser humano.

Referências

GALDINO, Naamã. **Criptografia**. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia - GO, 2015.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar - Logaritmos**. Atual Editora, 3ª edição. São Paulo, 1977.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar - Conjuntos, funções**. Atual Editora, 3ª edição. São Paulo, 1977.

TKOTZ, V. **História da Criptografia**. Disponível em:

<<http://www.numaboa.com.br/criptografia/historia>>, acesso em: 10 fev. 2015.



DESAFIOS E BARREIRAS DE GÊNERO NA TRAJETÓRIA PROFISSIONAL DE MULHERES NA MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE EM UMA INSTITUIÇÃO DE ENSINO SUPERIOR DE GOIÁS

Anna Júlia Alves de Oliveira(Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia.
annajuliaalvesdeoliveira2002@gmail.com)

Ana Cristina Gomes de Jesus(Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia.
ana.jesus@ifg.edu.br)

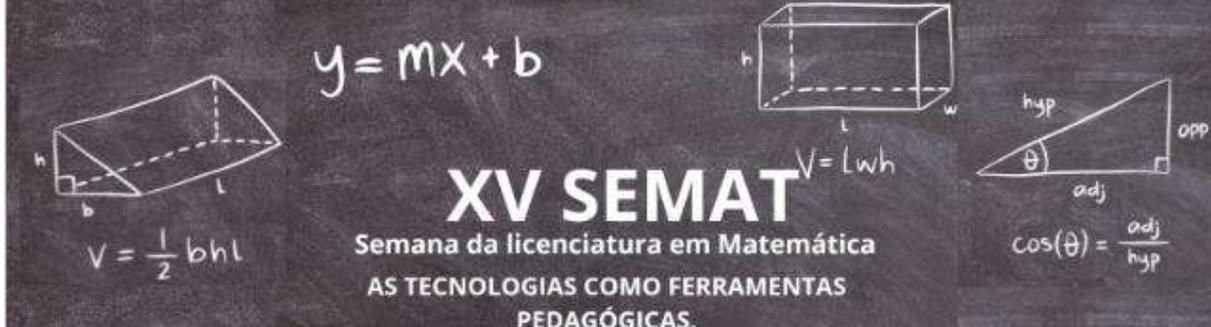
Resumo

O presente texto apresenta um recorte dos resultados de uma pesquisa do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG), câmpus Goiânia, cujo objetivo foi investigar e compreender as percepções das mulheres que atuam na área de Matemática em uma IES no Estado de Goiás em relação às suas experiências de vida, às formas de discriminação de gênero que enfrentam e como esses aspectos impactam suas trajetórias acadêmicas e profissionais, abrangendo tanto a formação quanto a atuação na área de Matemática. Os autores que fundamentam os estudos foram Cabral (1998), Dufu (2020), Gomes e Siqueira (2010), dentre outros. A abordagem da pesquisa é qualitativa, e os instrumentos de coleta de dados foram a revisão bibliográfica, o currículo Lattes e o questionário. O questionário foi encaminhado a 12 professoras de Matemática da IES, e obteve-se um retorno de 6 questionários. A partir desses, foram analisadas as respostas em diálogo com o referencial adotado. Os resultados indicam que houve avanços significativos nos últimos 10 anos na instituição, no referido lócus da pesquisa; contudo, as mulheres representam cerca de 30% do quadro total, o que evidencia uma desigualdade de gênero na ocupação desse cargo. Os resultados também mostraram uma sobrecarga das mulheres nos afazeres domésticos, dificultando o equilíbrio entre as atividades profissionais e pessoais.

Palavras-chave: Discriminação. Professoras de Matemática. Igualdade de Gênero.

1 Introdução

Este texto é um trecho do meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do curso de licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG), câmpus Goiânia. A temática surge da minha própria inquietação feminina e das minhas experiências familiar, acadêmica e profissional. Desde cedo, as mulheres enfrentam desafios impostos pela sociedade, com muitas obrigações tradicionalmente atribuídas a elas. Ao



escolher a profissão, especialmente na área de exatas, percebi um preconceito associado à escolha de uma mulher por esse campo. No ambiente profissional, é evidente a preferência por professores do sexo masculino, especialmente em escolas particulares e centros universitários. Um estudo realizado por Lima (2023) revela que, em uma universidade pública do estado de Goiás, apenas 31% do corpo docente é composto por mulheres. Embora mais mulheres estejam concluindo a graduação, essa proporção não se reflete nos cargos de maior prestígio na docência do ensino superior.

Essa disparidade de gênero no corpo docente reflete desigualdades estruturais e sociais que afetam a participação das mulheres no campo acadêmico, assim como nas barreiras históricas, obstáculos estruturais, falta de modelos e mentoras femininas e até mesmo em viés de gênero e discriminação em que pode influenciar a contratação, promoção, alocação de recursos e oportunidades de financiamento, contribuindo para a desigualdade no corpo docente (Lima, 2023, p.21).

Assim, a escolarização das mulheres foi tardia e precária até meados do século XIX, focada principalmente nas atividades domésticas e no aprendizado básico das letras. As escolas destinadas a mulheres ofereciam currículos deficientes, com uma formação acadêmica inferior em comparação aos homens. Em 1827, um projeto de ensino limitava o ensino de Aritmética às quatro operações básicas e dispensava a necessidade de ensinar Geometria às meninas (Saffioti, 1979). A Matemática é definida como a "ciência que estuda, por método dedutivo, objetos abstratos (números, figuras, funções) e as relações existentes entre eles" (Oxford English Dictionary¹, 2019). Historicamente, prevaleceu o discurso de que a matemática era majoritariamente para homens, pois se acreditava que as mulheres não tinham capacidade para compreender essa ciência complexa. Como resultado, algumas mulheres adotaram nomes masculinos para estudar matemática. Um exemplo é Marie-Sophie Germain, que utilizou o nome de um ex-aluno para ingressar na Escola Politécnica, trocando correspondências com o professor Lagrange, que a orientava nos estudos (Cavalari, 2007).

Destaca-se, no mercado de trabalho as mulheres enfrentam desafios significativos, como preconceito de gênero, sobrecarga de responsabilidades profissionais e domésticas, e a necessidade de conciliar demandas familiares e maternidade. Esses fatores podem impactar negativamente sua trajetória profissional, limitando suas oportunidades de crescimento e avanço na carreira.

Diante disso, Tiffany Dufu (2020, p.87) relata que:

¹ Disponível em: <https://languages.oup.com/google-dictionary-pt>.



Achamos que se as coisas derem errado em casa, teremos falhado como mulheres, porque a sociedade nos diz que para sermos mulheres bem-sucedidas precisamos ter filhos sempre prontos para fotos e uma cozinha impecável. Ao mesmo tempo, não devemos admitir abertamente que nosso sucesso como mulheres esteja ligado ao sucesso do lar. Isso faria com que parecêssemos fracas, ou pelo menos antiquadas. E não somos fracas nem antiquadas.

O sentimento de culpa por não se adequar ao padrão de ser uma mãe exemplar e não conciliar eficazmente as obrigações domésticas e o trabalho afeta muitas mulheres, prejudicando seu desempenho profissional. Esses desafios impactam negativamente a autoconfiança e o bem-estar, criando pressão adicional para equilibrar demandas familiares e profissionais.

Diante disso, o presente trabalho visa investigar as dificuldades enfrentadas por professoras de Matemática de uma Instituição de Ensino Superior (IES), destacando a desigualdade de gênero.

2 Fundamentação Teórica

Antes de mergulharmos em uma análise sobre a condição da mulher, é imperativo compreendermos o conceito de gênero. Iniciar esta discussão requer uma definição clara do termo, conforme delineado por Cabral (1998, p.142), que enfatiza: "gênero refere-se às relações sociais desiguais de poder entre homens e mulheres que são o resultado de uma construção social do papel do homem e da mulher a partir das diferenças sexuais". Essa definição destaca que o gênero não se limita a aspectos biológicos ou de sexo, mas sim é moldado pela construção histórica e social do indivíduo ao longo do tempo. Entender essa distinção é fundamental para uma análise crítica e abrangente da experiência feminina na sociedade.

Socialmente, a mulher era relegada a um papel de fragilidade, sensibilidade e dependência. Ela era ensinada, desde a infância, a se conformar com esses estereótipos, até mesmo na escolha das cores de suas roupas - meninas de rosa e meninos de azul. A educação de crianças reforçava esses papéis de gênero: as meninas eram direcionadas para brincadeiras que reproduziam tarefas domésticas, enquanto os meninos eram incentivados a atividades que demonstrassem poder e força. Como ressalta Cabral (1998, p.142), "as relações de gênero são moldadas por um processo pedagógico que começa desde o nascimento e perdura ao longo da vida, reforçando as desigualdades entre homens e mulheres".



Ademais, a história das mulheres, por muito tempo, foi contada predominantemente por homens, resultando em narrativas permeadas por estereótipos e visões distorcidas da realidade feminina. Além disso, a participação das mulheres na ciência foi historicamente restringida por concepções que as consideravam inferiores aos homens em diversas áreas, como biologia, psicologia e sociabilidade. Essa visão limitada contribuiu para a marginalização das mulheres nesse campo, privando-as de oportunidades de desenvolvimento e reconhecimento.

Tiffany Dufu observa que desde a infância, o papel atribuído ao homem e à mulher na sociedade é internalizado, refletindo-se em comportamentos conscientes e inconscientes. Ela ressalta que quando as mulheres assumem a maior parte das tarefas domésticas em comparação com os homens, as crianças absorvem a mensagem de que cuidar da casa é principalmente responsabilidade feminina, mesmo que isso não seja explicitamente comunicado a elas (Dufu, 2020). Consequentemente, desde cedo, as meninas são instruídas a considerar como sua responsabilidade principal os cuidados com a casa e os filhos.

Torna-se evidente que as mulheres enfrentam um desafio significativo ao equilibrar suas responsabilidades domésticas, cuidado com os filhos e trabalho, resultando em uma dupla jornada complexa de administrar. Essa realidade coloca as mulheres em uma posição delicada, lidando com múltiplas demandas e responsabilidades que podem gerar pressão e sobrecarga. Apesar desses desafios, as mulheres demonstram uma determinação notável em avançar em suas carreiras, desafiando estereótipos de gênero e buscando igualdade de oportunidades e reconhecimento profissional. Essa mudança de perspectiva reflete uma conscientização crescente sobre a importância da carreira na vida das mulheres, impulsionando-as a superar obstáculos e alcançar o sucesso merecido.

Assim enteden-se a participação das mulheres na ciência foi tardia devido à predominância masculina e às restrições impostas ao acesso feminino ao conhecimento. Assim, Gomes e Siqueira (2010) destacam que a entrada das mulheres nas universidades ocorreu de maneira gradual; apesar de terem acesso ao ambiente acadêmico, foram principalmente direcionadas para áreas de humanas, sendo culturalmente excluídas das áreas tecnológicas e de saúde. Mesmo nos dias atuais, é notável a predominância feminina nas áreas humanas, formando quase nichos exclusivamente femininos. Essa realidade suscita reflexões



sobre as dificuldades enfrentadas pelas mulheres na academia, os obstáculos à progressão na carreira e outros aspectos relevantes.

Apesar das barreiras intencionais criadas para restringir as mulheres a carreiras consideradas "femininas", é crucial reconhecer que tais restrições não são inatas nem inevitáveis, mas sim resultado de um sistema social e cultural que perpetua estereótipos de gênero e desigualdades hierárquicas. Portanto, é essencial desafiar e superar essas barreiras, promovendo a igualdade de oportunidades e valorizando as escolhas profissionais individuais, independentemente do gênero. No entanto, mesmo com essas adversidades mulheres notáveis tiveram grandes trabalhos nas ciências exatas, como Hipátia de Alexandria, Maria Gaetana de Agnesi, Maria-Sophie Germain, Mary Ellen Rudin, Marília Chaves Peixoto, Elza Furtado Gomide, entre outras.

3 Metodologia e Análise de Dados

A pesquisa realizada utilizou uma abordagem qualitativa, sendo considerada uma ferramenta auxiliar para a investigação, na qual toda questão técnica está relacionada a uma reflexão teórica. A pesquisa qualitativa é vista como uma disciplina que serve à pesquisa, mas que não pode ser dissociada da discussão teórica que a fundamenta. Ela enfatiza a importância de considerar a teoria enquanto se trabalha com questões técnicas, visando alcançar resultados significativos e bem fundamentados. Para conduzir nossa pesquisa utilizamos a revisão bibliográfica, análise do currículo Lattes e aplicamos um questionário as participantes da pesquisa.

A coleta de dados foi realizada através de um questionário produzido no googleforms e encaminhado por email e WhatsApp as participantes da pesquisa, no qual constava um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), a partir do aceite as participantes tinham acesso ao questionário, as participantes foram as professora de matemática do Instituto Federal de Goiás, câmpus Goiânia. A amostra da pesquisa consistiu em 12 professoras da área de matemática, incluindo tanto doutoras quanto mestras. No entanto, apenas 6 dessas professoras responderam ao questionário e contribuindo para a pesquisa.

O questionário foi composto por 36 perguntas, abordando tópicos como caracterização, condições socioeconômicas e informações sobre a formação acadêmica das participantes. Esse instrumento visou fornecer uma compreensão mais profunda das complexas questões e desafios que as professoras de Matemática no IFG podem ter



enfrentado ao longo de suas trajetórias acadêmicas e profissionais. Análise dos dados buscou diálogo das respostas com o referencial teórico estudado. Trouxemos alguns recortes dos resultados do questionário, a fim de clarificar os resultados.

Pergunta 1: *Quando decidiu fazer graduação em Matemática? Optou por Licenciatura ou Bacharelado? Recebeu apoio de sua família?*

Nesse cenário, a Professora 2 compartilhou que decidiu cursar Matemática após o ensino médio devido à sua afinidade com a disciplina. A Professora 2 também destacou o apoio familiar que recebeu, enquanto a Professora 1 ressaltou que sua família priorizava seus estudos, facilitando sua trajetória acadêmica.

Observamos que todas as participantes optaram pelo bacharelado em Matemática, exceto uma que escolheu a licenciatura. Analisando o currículo Lattes de todas as professoras de matemática do IFG, constatou-se que apenas duas optaram pela licenciatura, enquanto as demais escolheram o bacharelado. O apoio familiar desempenha um papel crucial nesse percurso educacional. Maria Gaetana Agnesi, por exemplo, recebeu forte apoio de sua família, especialmente de seu pai, um professor de Matemática, que incentivou seus estudos (Cavalari, 2007).

Pergunta 2: *Como você enxerga a presença de mulheres no corpo docente da área de Matemática em sua instituição? Você acredita que a representatividade é igualitária? Justifique?*

A Professora 1 observa que "durante muitos anos em coordenações anteriores a presença de mulheres não foi igualitária, marcada por preconceitos, sendo a maioria do corpo docente masculina. Todavia, atualmente há igualdade e representatividade. Não vejo problemas." Ela destaca a superação da desigualdade de gênero ao longo do tempo. Já a Professora 2 afirma que "a representatividade ainda não é igualitária, mas avançamos um pouco nos últimos 13 anos. Em 2010, quando fui professora substituta no Campus Goiânia do IFG, a única professora mulher da Matemática era a *****, hoje somos mais que 10 num total de 37." Esse depoimento evidencia a disparidade de gênero que existia e ainda existe, contudo tem-se um progresso significativo alcançado.

A Professora 3 comenta que "infelizmente ainda há poucas mulheres em relação à quantidade de homens. Não há representatividade igualitária." Em contraste, a Professora 4 relata que "hoje tem uma quantidade expressiva de mulheres no nosso corpo docente e



atualmente considero essa representatividade igualitária, comparada há uns 10 anos atrás, onde o grupo era composto por um percentual grande de homens. Alguns muito machistas e isso era muito perceptível na hora da divisão de trabalho e carga horária." Por outro lado, a Professora 5 diz sobre a presença feminina no corpo docente na área de Matemática, "enxergo com bons olhos, entraram por mérito de concurso público, assim como os homens. Não vejo como desigualdade, foi capacidade de aprovação em concurso, gênero não interfere na capacidade intelectual. Somos em número menor que os homens, mas não vejo problemas nisso". Contudo há de se salientar, que o concurso público para docente do ensino superior, é composto de uma prova objetiva, análise de currículo mas tem também a prova didática que é composta por banca de professores que pode assumir um caráter subjetivo.

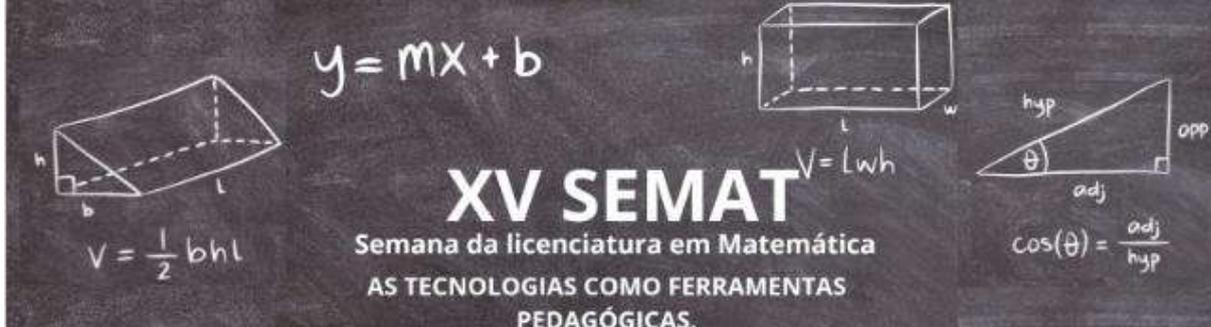
De acordo com um estudo realizado por Lima (2023) revela que, em uma universidade pública do estado de Goiás, apenas 31% do corpo docente é constituído por mulheres. Afirmando as falas das professoras, que dizem estar em menor número.

Pergunta 3: *Poderia compartilhar como tem gerenciado ou está gerenciando as demandas familiares em relação aos seus estudos? Esse processo foi mudando ao longo dos anos?*

A Professora 2 compartilha que, mesmo sem filhos, ainda enfrenta demandas domésticas significativas. Seu companheiro é atencioso com as tarefas domésticas, mas há uma carga invisível relacionada à organização da casa, como planejamento de compras, elaboração do cardápio semanal e coordenação de serviços quando necessário, que recai sobre ela. Além das responsabilidades domésticas, seu trabalho na instituição consome muito tempo, exigindo organização e disciplina para equilibrar estudos e pesquisas. Essa carga de trabalho também afeta seu tempo de lazer, autocuidado e a oportunidade de passar tempo com pessoas queridas.

Além disso, a Professora 4 destaca que possui uma rede de apoio em casa, o que a tem ajudado a gerenciar as significativas demandas em sua vida. Lidar com o trabalho fora, tarefas domésticas, cuidar de um filho pequeno, marido e também dos pais idosos que necessitam de cuidados não é uma tarefa simples. Conciliar todas essas responsabilidades com o trabalho fora de casa se torna viável graças à assistência que recebe.

As demandas familiares englobam responsabilidades relacionadas à criação dos filhos, tarefas domésticas e questões pessoais. Diante disso, Tiffany Dufu (2020) ressalta a desvantagem dessa forte associação entre mulheres e as tarefas domésticas. Isso coloca uma



pressão significativa sobre as mulheres, que muitas vezes se sentem sobrecarregadas ao tentar equilibrar as demandas da casa e os cuidados com os filhos.

4 Considerações Finais

Este estudo teve como principal propósito uma investigação abrangente sobre os desafios enfrentados por professoras de Matemática no âmbito do IFG durante suas trajetórias formativas, acadêmicas e carreiras profissionais. Os resultados obtidos destacaram que algumas professoras enfrentaram preconceitos, tanto evidentes quanto velados, em sua jornada acadêmica e profissional. Isso evidencia a persistência de barreiras de gênero que ainda afetam as mulheres na área da Matemática e no ambiente acadêmico em geral. Outro aspecto relevante identificado foi à predominância da figura materna nas responsabilidades domésticas. Isso sugere que, apesar do progresso em direção à igualdade de gênero, a carga desproporcional de afazeres domésticos continua a recair principalmente sobre as mulheres.

Em suma, os resultados deste estudo indicam que a igualdade de gênero ainda não foi plenamente alcançada no contexto das professoras de Matemática no IFG.

5 Referências

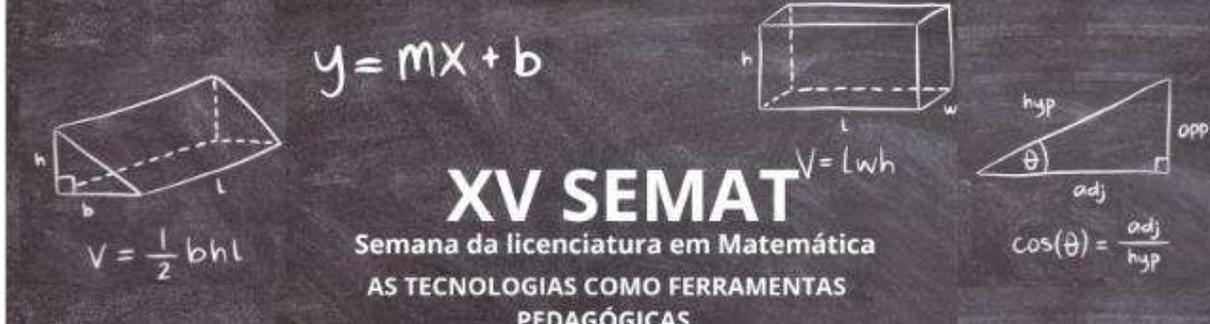
CABRAL, Francisco; DÍAZ, Margarita. **Relações de gênero**. In: secretaria municipal de educação de belo horizonte; fundação Odebrecht. Cadernos afetividade e sexualidade na educação: um novo olhar. Belo Horizonte: Gráfica e Editora RonaLtda, 1998. p. 142-150.

DUFU, Tiffany. **Deixe a peteca cair**: como as mulheres conquistam mais quando fazem menos. 2ª edição. São Paulo: LeYa Brasil, 2020.

GOMES, Beatriz de Azevedo; SIQUEIRA, Vera Helena Ferraz de. **Questões de gênero na carreira de professoras universitárias na área /das ciências biomédicas**.2010.Disponível em: <http://www.fazendogenero.ufsc.br/9/resources/anais/1278282211_ARQUIVO_ARTIGOFAZENDOGENEROFINAL.pdf>. Acesso em: 20 de novembro de 2022.

LIMA, Lucas Moraes de. **A presença e atuação de professoras de matemática em uma universidade pública do estado de Goiás**. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Goiânia, 2023. Disponível em: <<https://repositorio.ifg.edu.br/handle/prefix/1584>>. Acesso em: 10 de agosto de 2023.

SAFFIOTI, Heleieth. **A mulher brasileira na sociedade de classes**: mito e realidade. Petrópolis: Vozes, 1979.



PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ÁREA E PERÍMETRO DE FIGURAS PLANAS PARA ALUNOS DA ZONA RURAL, COM ATIVIDADES

Luciano Lopes de Sousa

Universidade Federal de Goiás. E-mail prolujk@gmail.com

Hiuri Reis

Universidade Federal de Goiás. E-mail hiuri_reis@ufg.br

Resumo

Este trabalho investiga a aplicação de conceitos matemáticos de área e perímetro na Educação de Jovens e Adultos (EJA), com ênfase na utilização do Google Earth como recurso pedagógico. O estudo aborda inicialmente o desenvolvimento histórico e legislativo da EJA, destacando a importância da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) de 1996, que reforçou o direito à educação para jovens e adultos que não concluíram os estudos em idade regular. Com base no ensino exploratório, o trabalho propõe uma sequência didática prática e colaborativa que integra o Google Earth, permitindo que os alunos visualizem e manipulem formas geométricas em ambientes reais, conectando a matemática ao cotidiano. As atividades são estruturadas em etapas: introdução ao Google Earth, aplicação dos conceitos matemáticos, realização de atividades colaborativas, e avaliação reflexiva sobre a aplicabilidade dos conceitos. A proposta visa estimular o pensamento crítico, a resolução de problemas e o trabalho em grupo, além de proporcionar uma compreensão espacial aprimorada e facilitar a retenção dos conceitos matemáticos.

Palavras-chave: Educação de Jovens e Adultos (EJA), ensino exploratório, área e perímetro, tecnologia educacional, inclusão educacional.

1 Considerações Iniciais

A Educação de Jovens e Adultos (EJA) surgiu nas Constituições Federais da Era Vargas para atender às demandas de uma classe trabalhadora que precisava de acesso à educação primária pública, gratuita e obrigatória. Esse movimento visava capacitar a população adulta, que, ao longo do rápido crescimento industrial do país, precisava de



instrução para acompanhar o avanço econômico.

Em 1996, a EJA ganhou novo impulso com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), que assegurou o direito à continuidade dos estudos para jovens e adultos que, por diversas razões, não completaram o ensino fundamental e médio em idade regular. A LDB reforçou a gratuidade e instituiu mecanismos para incentivar a permanência dos alunos nas escolas, viabilizando a conciliação entre atividades laborais e a vida acadêmica. Além disso, a LDB articulou a EJA com o ensino profissionalizante, proporcionando uma formação mais ampla e preparando os alunos para o mercado de trabalho. A criação de exames supletivos e formas alternativas de certificação também foi um avanço importante, permitindo a validação de conhecimentos adquiridos ao longo da vida e facilitando a conclusão dos estudos.

Para enfrentar o desafio da evasão, o ensino exploratório foi introduzido como uma metodologia inovadora na EJA, promovendo um aprendizado mais dinâmico e significativo. Essa abordagem pedagógica valoriza a investigação, a descoberta e a participação ativa dos alunos, fazendo com que o processo de aprendizado esteja diretamente ligado às realidades e interesses dos estudantes. Ao colocar o aluno no centro do processo, o ensino exploratório incentiva a construção autônoma do conhecimento e a aplicação prática dos conceitos, o que não só facilita a retenção das informações, mas também desenvolve habilidades críticas como resolução de problemas e comunicação.

Segundo Ana Canavarro (2005), o ensino exploratório desafia os alunos a formular conjecturas, explorar diversas estratégias e compartilhar suas descobertas, promovendo o desenvolvimento da autonomia e do pensamento crítico. Esse método encoraja os alunos a experimentar e a conectar conceitos, o que enriquece a compreensão e a aplicação da matemática em situações reais.

O ensino exploratório na educação matemática busca não apenas a memorização de procedimentos, mas a compreensão conceitual e a aplicação prática dos conceitos matemáticos. Autores como Jo Boaler e Paul Lockhart destacam a importância de os alunos entenderem os princípios subjacentes aos conceitos matemáticos, em vez de simplesmente aprenderem a seguir passos mecânicos. Isso contribui para uma compreensão mais profunda da matemática, capacitando os alunos a aplicar seus conhecimentos de maneira criativa e flexível em diversos contextos, além de estimular o pensamento crítico e a solução de



problemas de forma inovadora.

A incorporação de tecnologias digitais, como GeoGebra e Google Earth, ampliou significativamente as possibilidades de implementação do ensino exploratório, oferecendo aos alunos uma maneira interativa e visual de manipular conceitos matemáticos complexos.

Em resumo, a Educação de Jovens e Adultos tem evoluído para atender às necessidades de uma sociedade em constante mudança. O ensino exploratório e as tecnologias digitais representam novas estratégias que, ao estimular o interesse e a participação dos alunos, potencializam o desenvolvimento de competências essenciais e contribuem para a redução da evasão escolar, permitindo que a EJA continue cumprindo seu papel fundamental de inclusão educacional.

2 Desenvolvimento

Neste trabalho temos por objetivo explorar a aplicação dos conceitos de área e perímetro no contexto da Educação Matemática, utilizando o Google Earth como ferramenta pedagógica. A proposta de ensino apresentada visa a integração de tecnologias digitais no processo de aprendizagem, proporcionando aos alunos uma abordagem prática e inovadora para compreender e aplicar os conceitos geométricos. A utilização de recursos como o Google Earth permite aos estudantes visualizar e interagir com formas geométricas em ambientes reais, promovendo uma compreensão espacial mais aprofundada e conectando a matemática ao seu cotidiano.

A sequência didática, busca explorar o potencial do Google Earth na educação, proporcionando aos alunos uma experiência prática e colaborativa. A partir da identificação e classificação de polígonos em mapas digitais, os estudantes são convidados a explorar conceitos de área e perímetro, aplicando esses conhecimentos para calcular medidas de terrenos e áreas em contextos próximos à sua realidade, como a delimitação de propriedades rurais e urbanas. Além disso, a metodologia proposta estimula o pensamento crítico, o trabalho em grupo e a troca de experiências, características fundamentais para o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa.

Serão discutidas as etapas da sequência didática, desde a introdução ao Google Earth até as atividades colaborativas e a reflexão final sobre a aplicabilidade dos conceitos estudados. A intenção é proporcionar uma análise crítica de como a tecnologia pode ser



incorporada ao ensino de matemática, ampliando as possibilidades de aprendizagem e tornando os conceitos de área e perímetro mais concretos e acessíveis aos alunos. Assim, este capítulo contribui para o entendimento de como recursos digitais podem transformar a prática pedagógica e enriquecer o ensino da matemática, preparando os alunos para enfrentar desafios tanto no ambiente escolar quanto no cotidiano.

Etapas da Sequência Didática

1. Introdução ao Google Earth:

Objetivo: Familiarizar os alunos com a plataforma e sua aplicação em matemática.

- Navegação básica no Google Earth: Exploração da interface e localização de áreas próximas à escola e à residência dos alunos.
- Delimitação de terrenos e criação de polígonos sobre locais conhecidos pelos alunos: O professor demonstra como traçar e delimitar polígonos em locais familiares, como a escola ou o bairro dos alunos.

2. Exploração de Conceitos Matemáticos:

Objetivo: Introduzir e aplicar conceitos de área e perímetro utilizando o Google Earth.

- Uso do Google Earth para calcular a área e o perímetro das regiões planas delimitadas: Após a delimitação dos polígonos, os alunos utilizam as ferramentas do Google Earth para calcular as áreas e os perímetros das formas geométricas.
- Introdução de fórmulas matemáticas: O professor explica as fórmulas para calcular área e perímetro e auxilia os alunos na aplicação dessas fórmulas nas formas desenhadas.

3. Atividades Colaborativas:

Objetivo: Promover o trabalho em grupo e a troca de conhecimento entre os alunos.

- Formação de grupos: Os alunos são divididos em grupos e recebem a tarefa de definir, medir e discutir as áreas de locais desejados no Google Earth. Cada grupo deve selecionar um terreno ou área e realizar os cálculos necessários.
- Compartilhamento de resultados: Após a realização das atividades, cada grupo compartilha suas descobertas e estratégias com os outros, discutindo os métodos utilizados e os resultados obtidos.

4. Avaliação e Reflexão:

Objetivo: Avaliar o entendimento dos alunos e promover uma reflexão sobre a aplicação dos



conceitos no cotidiano.

- Discussão sobre a aplicabilidade dos conceitos: Os alunos discutem como os conceitos de área e perímetro são usados no cotidiano, como na delimitação de terrenos ou áreas verdes.
- Reflexão sobre o aprendizado com a integração das tecnologias: O professor promove uma reflexão final sobre como o uso do Google Earth ajudou a entender de maneira prática os conceitos matemáticos e como a tecnologia pode ser integrada ao aprendizado da matemática.

Atividade de Aplicação:

O professor apresenta aos alunos o Google Earth de forma geral, abordando algumas ferramentas básicas da plataforma. Em seguida, o objetivo da atividade é proposto:

1. Localizar no globo terrestre, com o auxílio do Google Earth, a escola onde estudam e o posto de gasolina, determinando pontos no plano.
2. Ligar os pontos referentes à escola e ao posto de gasolina, formando segmentos de reta, e calcular os comprimentos, ou seja, a distância entre os dois pontos extremos do segmento.

Fechamento:

A atividade é finalizada com a apresentação dos resultados obtidos por cada grupo. Os alunos discutem os cálculos e as diferenças observadas nos resultados, aplicando os conceitos de área e perímetro em contextos reais. O professor encerra a sequência didática reforçando a importância de integrar a tecnologia no processo de aprendizagem matemática, mostrando como ferramentas como o Google Earth podem ampliar a compreensão espacial e tornar os conceitos matemáticos mais acessíveis e aplicáveis no cotidiano.

3 Considerações Finais

Este trabalho apresenta uma possibilidade pedagógica, capacitando o professor a promover experiências genuínas e colocando o aluno como protagonista de seu aprendizado. Espera-se que a proposta inspire educadores e contribua para uma aprendizagem significativa e atrativa, marcada pela curiosidade, independência e conexão com o mundo real e atual. O Google Earth pode facilitar a compreensão de conceitos abstratos, como área e perímetro, ao conectá-los à realidade dos alunos e que o trabalho colaborativo entre estudantes de diferentes

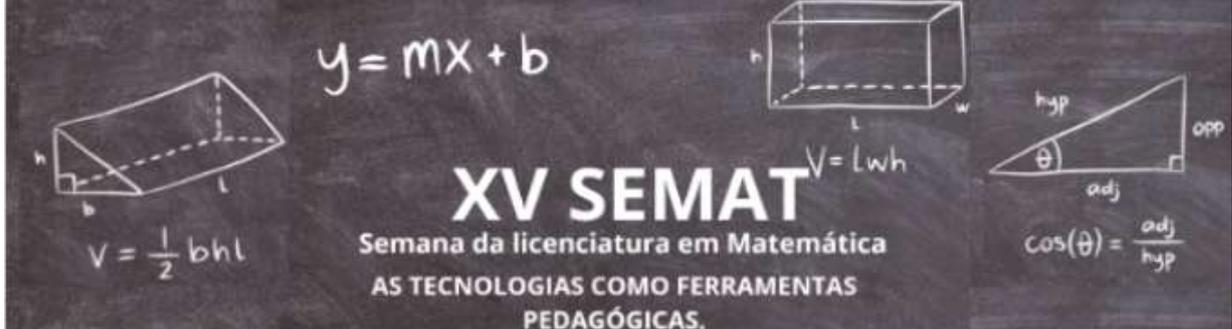


faixas etárias pode promover um ambiente de inclusão e trocas de experiências, enriquecendo o processo de aprendizagem.

5 Referências

- BOALER, J. **Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages, and innovative teaching**. San Francisco: Jossey-Bass, 2016.
- CANAVARRO, A. **Matemática em investigação: uma abordagem exploratória para o ensino da matemática**. Lisboa: Texto Editores, 2005.
- CANAVARRO, A. **O papel do professor no ensino exploratório de matemática**. Lisboa: Texto Editores, 2011.
- FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.
- VYGOTSKY, L. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. São Paulo: Martins Fontes, 1989.
- DISTRITO FEDERAL (2020). **Currículo em movimento do Distrito Federal**. Brasília: Secretaria de Educação do Distrito Federal.

Parte II
Matemática



EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

Karoline Victor Fernandes – (Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia.
karoline.victor@ifg.edu.br)

Ciro Castro De Araujo – (Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia.
ciro97castro@hotmail.com)

Resumo

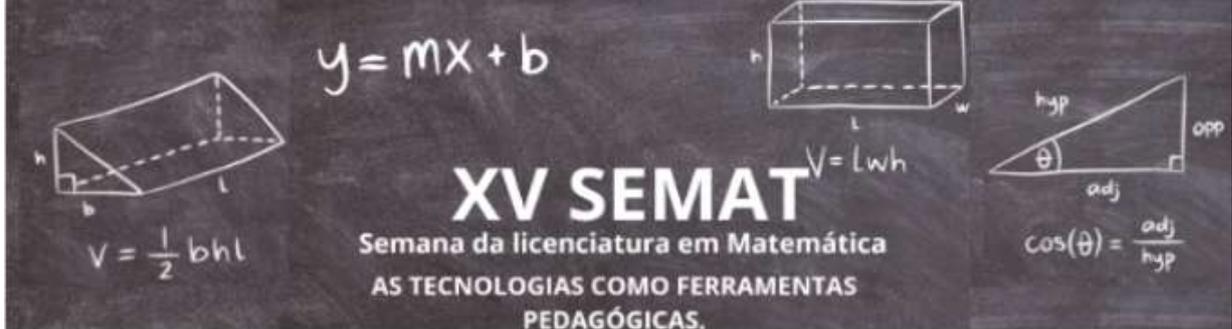
A história das equações diferenciais é marcada por contribuições de muitos matemáticos ao longo dos séculos, refletindo o desenvolvimento contínuo da matemática como ferramenta essencial para descrever o mundo natural. As equações diferenciais de ordem dois são essenciais para a modelagem e compreensão de sistemas complexos em quase todos os campos das ciências e engenharia. Apresentamos aqui as equações diferenciais lineares de segunda ordem, o problema de valor inicial, o teorema de existência e unicidade. Além disso mostramos que o espaço solução das equações diferenciais lineares homogêneas de ordem dois têm dimensão dois. Verificamos que para resolver uma equação não-homogênea é necessário encontrar uma solução particular da mesma e o conjunto solução da equação homogênea associada.

Palavras-chave: Equações Diferenciais. Problema de Valor Inicial. Equações Lineares Homogêneas.

1 Introdução

As equações diferenciais de segunda ordem são fundamentais em várias áreas da ciência e da engenharia, com uma importância particular pelos seguintes motivos: elas frequentemente surgem na modelagem de sistemas dinâmicos. Por exemplo, a equação de movimento de Newton ($F = ma$) para um objeto em uma dimensão é uma equação diferencial de segunda ordem. Também aparecem na análise de circuitos elétricos, onde as equações diferenciais de segunda ordem podem descrever a corrente em circuitos com componentes como resistores, capacitores e indutores (OLIVEIRA; MAIORINO, 1997).

Apresentamos aqui como obter a solução de equações diferenciais lineares de segunda ordem homogêneas e não-homogêneas, obter tais soluções é relevante pois muitos sistemas



físicos que envolvem oscilações (como pêndulos, molas, ou circuitos RLC) são modelados por equações diferenciais de segunda ordem. A equação do calor, que descreve a distribuição de temperatura ao longo do tempo em um corpo, e a equação da onda, que descreve a propagação de ondas em meios como ar, água ou em cordas vibrantes, são equações diferenciais de segunda ordem. Outros exemplos são as equações de Maxwell, que governam o eletromagnetismo e a equação de campo de Einstein na relatividade geral, que descreve a gravidade.

O propósito é ampliar a compreensão e revisar resultados já conhecidos sobre equações diferenciais de segunda ordem. A intenção é reestruturar demonstrações clássicas para deixá-las mais simples e acessíveis, apresentando explicações mais intuitivas e claras, com o objetivo de facilitar o aprendizado e compreensão dos estudantes.

2 Metodologia

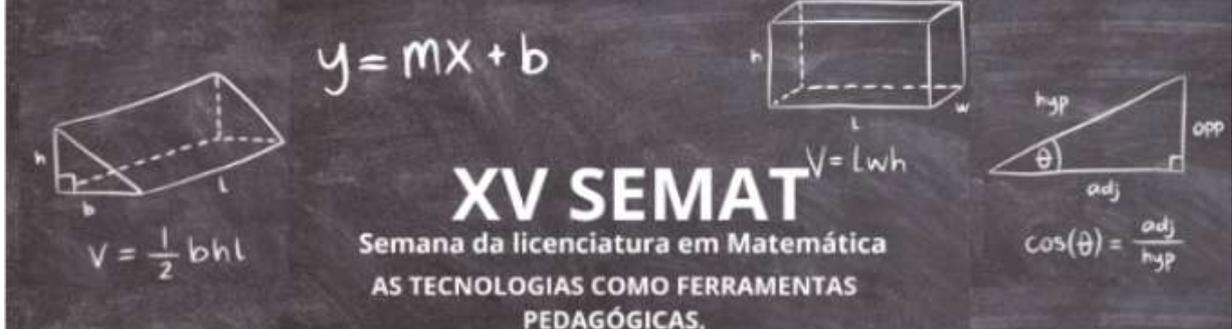
A metodologia utilizada se enquadra na pesquisa bibliográfica ou teórico-conceitual com foco na análise de resultados já existentes em (BOYER; MERZBACH, 2019), (BOYCE; DI-PRIMA, 2010) e (ZILL, 2016). Apresentamos as equações diferenciais lineares de segunda ordem, um problema de valor inicial e o teorema de existência e unicidade para essas equações. Associamos um operador diferenciável à uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem para mostrar que o núcleo desse operador linear tem dimensão dois, ou seja existe um conjunto formado por duas soluções tal que todas as outras soluções são combinações lineares dessas duas. Depois verificamos que para resolver uma equação diferenciável não-homogênea de segunda ordem é necessário resolver a equação homogênea associada, encontrando o conjunto fundamental de soluções, e depois encontrar uma solução particular para a equação não-homogênea. O objetivo é aprofundar o entendimento e revisar resultados matemáticos conhecidos sobre equações diferenciais de segunda ordem, reescrever demonstrações já conhecidas de forma mais simplificada e tornar as provas mais acessíveis para estudantes, propondo explicações mais claras ou intuitivas.

3 Resultados e Discussão

3.1 Equações lineares de Segunda Ordem

A forma geral de uma equação linear de segunda ordem é

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \quad (1)$$



Vamos nos limitar nos casos onde p , q e g são funções contínuas num intervalo I . Se uma equação de segunda ordem $y'' = f(x, y, y')$ não possui a forma geral da equação linear de segunda ordem como descrita em (1), então é denominada não linear.

Um **problema de valor inicial** (PVI) de segunda ordem é constituído por uma equação da forma geral (1) e um par de condições iniciais da forma $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = z_0$.

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$$

Definição 1. A equação linear de segunda ordem $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ é chamada **homogênea** se $g(x) \equiv 0$, caso contrário é chamada **não-homogênea**.

3.2 Equações Lineares Homogêneas

Vamos considerar inicialmente equações lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes, ou seja, considere a seguinte equação

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (2)$$

onde a , b e c são constantes.

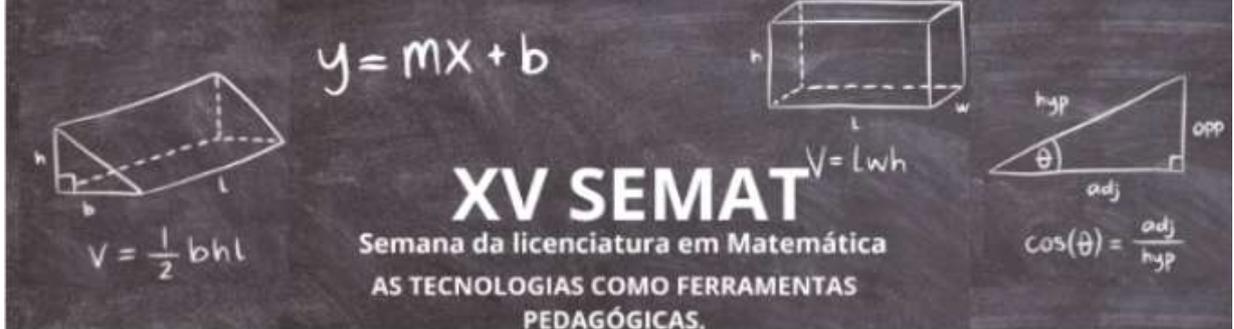
Vamos procurar uma solução $y = y(x)$ da forma $y(x) = e^{rx}$, onde r precisa ser determinado. Nesse caso temos que $y'(x) = re^{rx}$ e $y'' = r^2e^{rx}$. Substituindo na equação temos $(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$. Como $e^{rx} \neq 0$ para todo x , temos que

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (3)$$

Definição 2. A equação $ar^2 + br + c = 0$ é chamada **equação característica da equação diferencial** $ay'' + by' + cy = 0$.

Observe que se r_0 é raiz de (3), então $y(x) = e^{r_0x}$ é solução da equação diferencial (2). Observe ainda que, para solução da equação característica temos três possibilidades: duas raízes reais e distintas, uma raiz real dupla e duas raízes não reais. Supondo que a equação característica (3) possua duas raízes reais e distintas, isto é, $b^2 - 4ac > 0$. Sejam r_1 e r_2 raízes da equação (3). Portanto, para todo par de constantes c_1 e c_2 , temos que $y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$ é solução de (2), pois $y' = c_1r_1e^{r_1x} + c_2r_2e^{r_2x}$ e $y'' = c_1r_1^2e^{r_1x} + c_2r_2^2e^{r_2x}$, logo

$$ay'' + by' + cy = c_1(ar_1^2 + br_1 + c)e^{r_1x} + c_2(ar_2^2 + br_2 + c)e^{r_2x} = 0.$$



Se tivermos condições iniciais

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$$

então podemos montar um sistema:

$$\begin{cases} c_1 e^{r_1 x_0} + c_2 e^{r_2 x_0} = y_0 \\ c_1 r_1 e^{r_1 x_0} + c_2 r_2 e^{r_2 x_0} = z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -c_1 r_2 e^{r_1 x_0} - c_2 r_2 e^{r_2 x_0} = -r_2 y_0 \\ c_1 r_1 e^{r_1 x_0} + c_2 r_2 e^{r_2 x_0} = z_0 \end{cases}$$

então

$$c_1(r_1 - r_2)e^{r_1 x_0} = z_0 - r_2 y_0 \Rightarrow c_1 = \frac{z_0 - r_2 y_0}{r_1 - r_2} e^{-r_1 x_0}$$

e substituindo na outra equação temos $c_2 = \frac{z_0 - r_1 y_0}{r_2 - r_1} e^{-r_2 x_0}$ e com isso obtemos a solução do PVI.

Exemplo 1. Encontre α para que a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

tenda para 0 quando $x \rightarrow +\infty$.

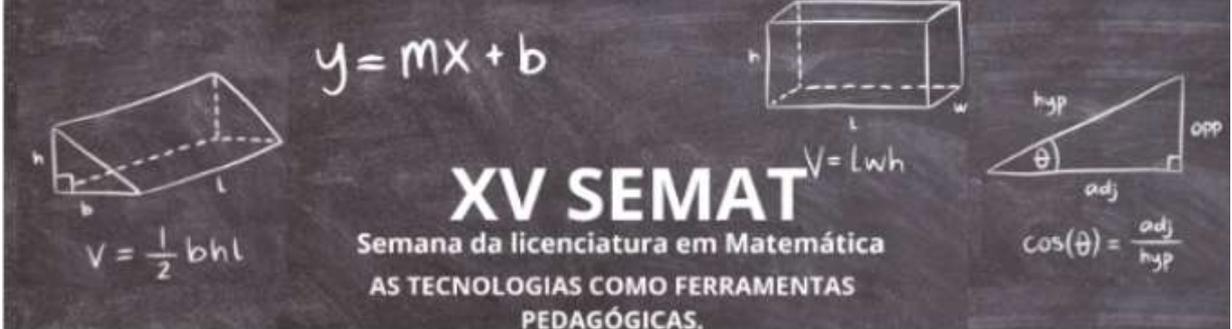
Demonstração. A equação característica $r^2 - r - 2 = 0$ possui raízes $r_1 = 2$ e $r_2 = -1$, logo a solução geral da EDO é dada por $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$. As condições iniciais levam ao sistema linear

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \alpha \\ 2c_1 - c_2 = 2 \end{cases}$$

o qual possui solução $c_1 = \frac{2+\alpha}{3}$ e $c_2 = \frac{2\alpha-2}{3}$. Logo, a solução do PVI é

$$y(x) = \left(\frac{2+\alpha}{3}\right) e^{2x} + \left(\frac{2\alpha-2}{3}\right) e^{-x}.$$

Quando $x \rightarrow +\infty$, temos $\frac{2\alpha-2}{3} e^{-x} \rightarrow 0$ e $e^{2x} \rightarrow +\infty$. Portanto, a única chance para que $y(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$ é que $\alpha = -2$. \square



Vamos introduzir agora a noção de **operador diferencial**. Considere $C^2(I)$ o conjunto das funções de classe C^2 definidas em I , isto é, das funções que são duas vezes diferenciáveis e a segunda derivada é contínua. Obviamente $C^2(I)$ é um espaço vetorial, pois $f_1, f_2 \in C^2(I)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $f_1 + f_2 \in C^2(I)$ e $\lambda f_1 \in C^2(I)$.

Dada uma equação diferencial linear de segunda ordem da forma $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, chamamos a transformação linear

$$L : C^2(I) \rightarrow C^0(I), \quad (4)$$

definida por $L(\phi)(x) = \phi''(x) + p(x)\phi'(x) + q(x)\phi(x)$ de operador diferencial associado a equação diferencial. Podemos observar que encontrar as soluções da equação é equivalente a encontrar o núcleo de (4). Posteriormente vamos provar que o núcleo desse operador tem dimensão 2, ou seja, existe um conjunto formado por duas soluções (base) tal que todas as outras soluções da equação são combinações lineares dessas duas.

Teorema 1. (*Existência e Unicidade para EDO's de 2º ordem lineares*) Dado um problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$$

onde p, q e g são contínuas num intervalo aberto I , com $x_0 \in I$, então existe uma única solução do PVI, $y = \phi(x)$, a qual está definida para todos os pontos de I .

Demonstração. Veja (SOTOMAYOR, 1979). □

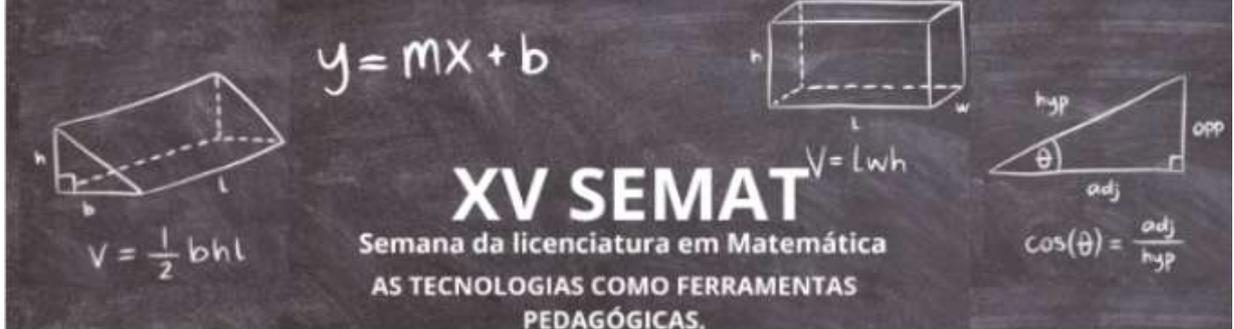
Teorema 2. Se y_1 e y_2 são soluções da equação $L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, então toda combinação linear $y = c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução.

Demonstração. Por hipótese temos $L[y_1] = 0$ e $L[y_2] = 0$. Daí

$$\begin{aligned} L[c_1y_1 + c_2y_2] &= [c_1y_1 + c_2y_2]'' + p(x)[c_1y_1 + c_2y_2]' + q[c_1y_1 + c_2y_2] = \\ &= c_1[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + c_2[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] = \\ &= c_1L[y_1] + c_2L[y_2] = 0. \end{aligned}$$

□

Definição 3. Sejam y_1 e y_2 soluções da equação diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Definimos



o *Wronskiano* das soluções y_1 e y_2 o seguinte determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x).$$

Teorema 3. *Sejam y_1 e y_2 soluções da equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Se $W(x_0) \neq 0$, onde x_0 é o ponto onde se fixam as condições iniciais $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = z_0$, então existe uma escolha das constantes c_1 e c_2 para o qual $y = c_1y_1 + c_2y_2$ é solução da EDO e satisfaz as condições iniciais.*

Demonstração. Já sabemos que qualquer combinação linear da forma $y = c_1y_1 + c_2y_2$ é solução da EDO. Substituindo as condições iniciais temos o sistema

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y_0 \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = z_0 \end{cases}$$

e resolvendo-o pela regra de Cramer temos

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ z_0 & y_2'(x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}} \quad e \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y_1'(x_0) & z_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}}$$

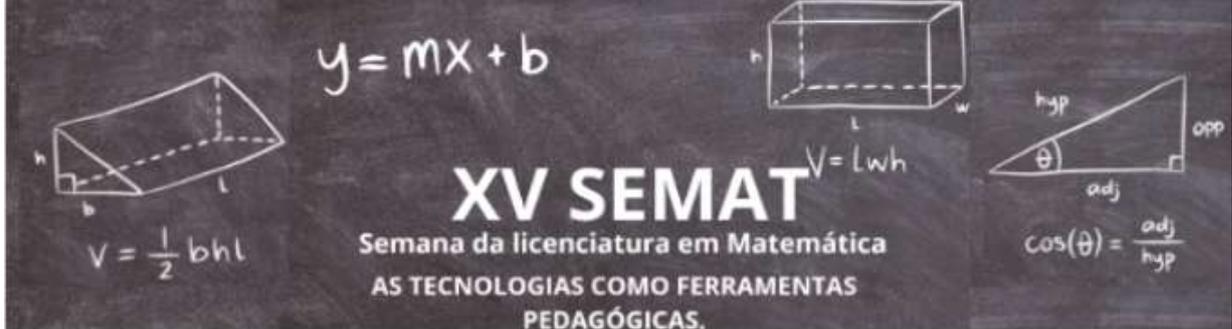
□

Teorema 4. *Sejam y_1 e y_2 soluções da equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Se existe um ponto x_0 tal que $W(x_0) \neq 0$, então a família de soluções $y = c_1y_1 + c_2y_2$ inclui todas as soluções da EDO.*

Demonstração. Dada ϕ uma solução qualquer da EDO, temos que mostrar que existem c_1 e c_2 tais que $\phi = c_1y_1 + c_2y_2$. Seja x_0 um ponto onde $W(x_0) \neq 0$. Calculemos ϕ e ϕ' nesse ponto e chamemos de y_0 e z_0 respectivamente, isto é,

$$\begin{cases} y_0 = \phi(x_0) \\ z_0 = \phi'(x_0). \end{cases}$$

Vamos considerar o problema de valor inicial



$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases} \quad (5)$$

Claramente ϕ é solução de (5). Como $W(x_0) \neq 0$, pelo teorema (3), existe uma escolha das constantes c_1 e c_2 para que $y = c_1y_1 + c_2y_2$ seja solução de (5). De acordo com o Teorema de Existência e Unicidade, temos que $\phi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ para todo x . \square

Observação 1. Em outras palavras, o teorema anterior afirma que se y_1 e y_2 são soluções tais que o Wronskiano não se anula em um ponto, então o conjunto $\{y_1, y_2\}$ gera o núcleo do operador diferencial L definido anteriormente em (4), ou seja, gera o espaço de soluções da EDO. Portanto, de acordo com o teorema anterior, se existe um ponto onde o Wronskiano não se anula, então o espaço de soluções tem dimensão no máximo dois.

Vamos relacionar agora o com a dependência linear.

Definição 4. Duas funções f e g são **linearmente dependentes (LD)** em I se existem constantes k_1 e k_2 não simultaneamente nulas tais que $k_1f(x) + k_2g(x) = 0$ para todo $x \in I$. As funções f e g são **linearmente independentes (LI)** se não são LD.

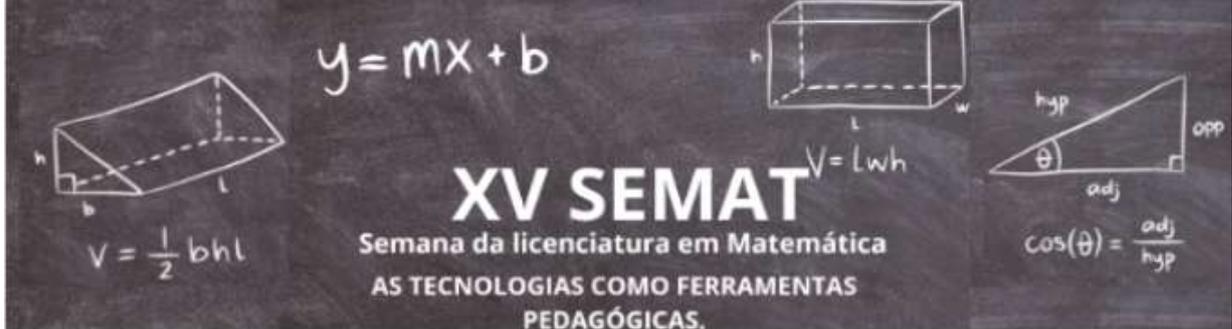
Teorema 5. Se f e g são funções deriváveis em I e $x_0 \in I$ é tal que $W(f, g)(x_0) \neq 0$, então f e g são LI em I .

Demonstração. Suponhamos que $k_1f(x) + k_2g(x) = 0 \forall x \in I$, logo derivando em relação a x obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} k_1f(x_0) + k_2g(x_0) = 0 \\ k_1f'(x_0) + k_2g'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Observe que a matriz dos coeficientes desse sistema linear homogêneo é exatamente $W(f, g)(x_0)$, o qual é não nulo. Isso implica que a única solução do sistema linear é $k_1 = k_2 = 0$. Portanto f e g são LI em I . \square

Observação 2. Agora usando os teoremas (4) e (5), se existe um ponto onde o Wronskiano de duas soluções não se anula, então essas duas soluções formam uma base para o espaço de soluções. Resta apenas demonstrar que para qualquer equação linear homogênea de segunda ordem é possível escolher duas soluções tal que o Wronskiano em um determinado ponto é não



nulo, neste caso sempre o espaço de soluções tem dimensão dois, isso será demonstrado no próximo teorema.

Definição 5. Se duas soluções da EDO y_1 e y_2 são tais que existe um ponto $x_0 \in I$ onde $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$, então dizemos que $\{y_1, y_2\}$ formam um **conjunto fundamental de soluções**. Nesse caso, $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ é chamada **solução geral** da EDO. Observe que o conjunto fundamental de soluções é uma base para o núcleo do operador diferencial associado à EDO, logo a dimensão do espaço de soluções é 2.

Exemplo 2. Mostraremos que $y_1 = \cos 2x$ e $y_2 = \sin 2x$ formam um conjunto fundamental de soluções para a equação $y'' + 4y = 0$. De fato, calculando-se o Wronskiano temos

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\cos 2x & 2\sin 2x \end{vmatrix} = 2(\cos^2 2x + \sin^2 2x) = 2 \neq 0.$$

O próximo teorema mostra como encontrar um conjunto fundamental de soluções

Teorema 6. Toda EDO da forma $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ possui um conjunto fundamental de soluções.

Demonstração. Seja y_1 a solução da EDO que satisfaz as seguintes condições iniciais $y(x_0) = 1$ e $y'(x_0) = 0$. E seja y_2 a solução da EDO que satisfaz as condições iniciais $y(x_0) = 0$ e $y'(x_0) = 1$. Calculando-se o Wronskiano dessas duas soluções no ponto x_0 temos

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Portanto $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto fundamental de soluções. □

Teorema 7. (Abel). Se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ onde p e q são contínua em I , então o $W(y_1, y_2)(x)$ é dado por

$$W(y_1, y_2) = ce^{-\int p(x)dx}$$

onde c é uma constante que depende de y_1 e y_2 , mas não de x . Além disso o $W(y_1, y_2)(x)$ é identicamente nulo (caso $c = 0$), ou nunca se anula (caso $c \neq 0$).

Demonstração. Sendo y_1 e y_2 soluções, temos que

$$\begin{cases} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0. \end{cases}$$



Multiplicando a primeira equação por $-y_2$ e a segunda por y_1 e somando, obtemos

$$(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + p(x)(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0.$$

ou seja,

$$W' + p(x)W = 0.$$

Resolvendo essa EDO linear temos

$$W(x) = ce^{-\int p(x)dx}.$$

□

Exemplo 3. Verifique que as funções $y_1(x) = x^{\frac{1}{2}}$ e $y_2(x) = x^{-1}$ são soluções da equação diferencial $2x^2 y'' + 3xy' - y = 0$, com $x > 0$.

Demonstração. Podemos calcular o de duas maneiras diferentes:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{\frac{1}{2}} & x^{-1} \\ \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & -x^{-2} \end{vmatrix} = -x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

ou, usando o Teorema de Abel,

$$W(y_1, y_2)(x) = e^{-\int \frac{3}{2x} dx} = ce^{-\frac{3}{2} \ln x} = cx^{-\frac{3}{2}}.$$

Obviamente pelo segundo método a resposta depende de uma constante. □

Teorema 8. Sejam y_1 e y_2 soluções de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, onde p e q são contínuas em um intervalo I . Então y_1 e y_2 são LD em I se, e somente se, $W(y_1, y_2)(x) = 0$ para todo $x \in I$.

Demonstração. (\Rightarrow) Se existe $x_0 \in I$ tal que $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$, então pelo teorema (5) segue que $\{y_1, y_2\}$ é LI.

(\Leftarrow) Escolha $x_0 \in I$ qualquer. Por hipótese $W(y_1, y_2)(x) = 0$ e daí

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

tem solução \tilde{c}_1 e \tilde{c}_2 não trivial. Seja

$$\phi(x) = \tilde{c}_1 y_1(x) + \tilde{c}_2 y_2(x).$$



Desde que $\phi(x_0) = 0$ e $\phi'(x_0) = 0$, então ϕ satisfaz o PVI

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0, \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

e pelo Teorema de Existência e Unicidade, segue que $\phi \equiv 0$ em I , isto é,

$$\tilde{c}_1 y_1(x) + \tilde{c}_2 y_2(x) = 0$$

para todo $x \in I$. Portanto $\{y_1, y_2\}$ é LD. □

4 Equações Lineares Não-Homogêneas

Vamos estudar a equação não homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \tag{6}$$

Para isso, considere a equação homogênea associada

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{7}$$

Teorema 9. *Se y_P e y_Q forem duas soluções da equação não homogênea (6), então a diferença $y_P - y_Q$ é uma solução da equação homogênea associada (7).*

Demonstração. Temos que:

$$\begin{cases} y_P'' + p(x)y_P' + q(x)y_P = g(x) \\ y_Q'' + p(x)y_Q' + q(x)y_Q = g(x) \end{cases}$$

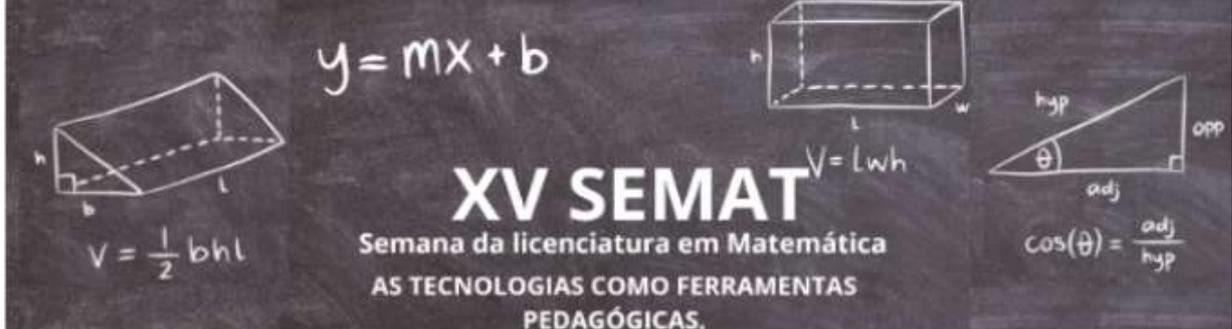
e fazendo a diferença obtemos

$$(y_P - y_Q)'' + p(x)(y_P - y_Q)' + q(x)(y_P - y_Q) = 0.$$

Em outras palavras, $y_P - y_Q$ é solução de (7) □

Teorema 10. *A solução geral da equação não homogênea (6) pode ser escrita na forma*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_P(x)$$



onde $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea (7) e y_P é uma solução particular da equação não homogênea (6).

Demonstração. Dado $\phi = \phi(x)$ uma solução de (6), então pelo teorema (9) $\phi - y_P$ é solução de (7). Como $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto fundamental de soluções de (7), segue que existem únicas constantes c_1 e c_2 tais que $\phi - y_P = c_1 y_1 + c_2 y_2$, ou seja,

$$\phi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_P(x).$$

□

A conclusão que obtemos desses dois últimos teoremas é que para resolver uma equação não-homogênea, resolve-se primeiro a homogênea associada, encontra-se um conjunto fundamental de soluções e depois encontra-se uma solução particular da equação não-homogênea. Existem pelo menos dois métodos para encontrar a solução particular de uma equação não-homogênea: método dos coeficientes indeterminados e método da variação de parâmetros.

5 Considerações finais

As equações diferenciais de segunda ordem são ferramentas poderosas e versáteis para descrever, prever e analisar uma ampla variedade de fenômenos naturais e tecnológicos. A busca de soluções dessas equações são essenciais em muitas áreas da ciência e engenharia, oferecendo uma capacidade mais sofisticada de modelar e analisar sistemas complexos. É possível ainda explorar as soluções de equações diferenciais de ordem maior que dois e suas aplicações.

6 Agradecimentos

Agradecemos ao grupo de pesquisa em matemática aplicada e álgebra do IFG/Goiânia-GPMAT/IFG

Referências

BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. [S.l.]: LTC Rio de Janeiro, 2010. v. 10.

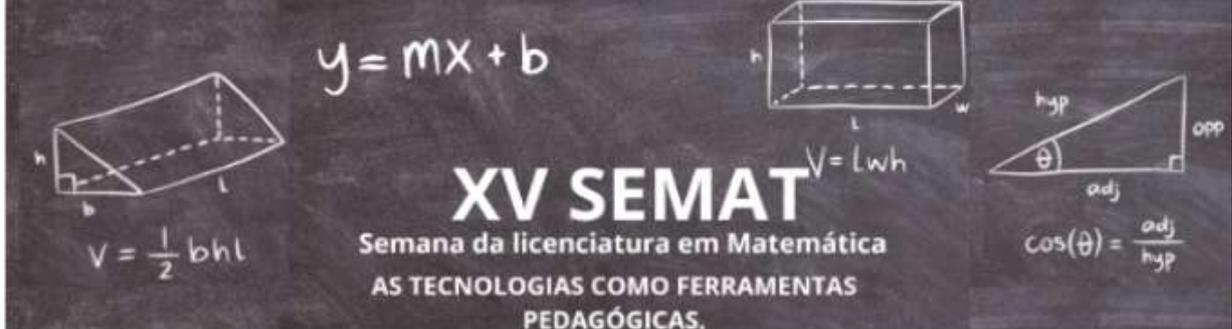
BOYER, Carl B; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. [S.l.]: Editora Blucher, 2019.



OLIVEIRA, Edmundo Capelas de; MAIORINO, Jose Emilio. **Introdução aos métodos da matemática aplicada.** [S.l.]: Unicamp, 1997.

SOTOMAYOR, Jorge. **Lições de equações diferenciais ordinárias.** [S.l.]: Projeto Euclides, 1979. v. 1.

ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem.** [S.l.]: Cengage Learning, 2016.



ÁLGEBRAS QUADRÁTICAS E ÁLGEBRAS ASSOCIADAS A GRAFOS ORIENTADOS EM NÍVEIS

José Eder Salvador de Vasconcelos – Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia.
jose.vasconcelos@ifg.edu.br

Karoline Victor Fernandes – Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia.
karoline.victor@ifg.edu.br

Márcio Dias de Lima – Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia. marcio.lima@ifg.edu.br

Resumo

Álgebras quadráticas são uma classe especial de álgebras associativas, geradas por elementos de um conjunto V , cujas relações são dadas por polinômios quadráticos. As relações estão contidas no espaço de grau 2, $V \otimes V$, sendo combinações bilineares dos geradores. Muitas dessas álgebras são Koszul, caracterizadas por uma dualidade natural entre sua resolução livre e sua álgebra dual, o que confere simplicidade à sua estrutura homológica. Exemplos clássicos de álgebras quadráticas incluem a Álgebra de Clifford, fundamental na geometria e física, e as Álgebras de Jordan, aplicadas à física teórica. As álgebras de Artin-Schelter também são importantes na geometria não comutativa. Pesquisas recentes têm explorado extensões dessas estruturas, como as álgebras Q_n , associadas ao reticulado booleano de subconjuntos, e $A(\Gamma)$, relacionadas a grafos orientados em níveis. Essas álgebras exibem propriedades Koszul, e seus estudos se focam nas funções geradoras do traço graduado de seus automorfismos.

Palavras chaves: Álgebras quadráticas; Álgebras associadas a grafos orientados em níveis; Série de Hilbert; Funções geradoras do traço graduado; Koszulidade.

1 Introdução

Álgebras quadráticas são uma classe especial de álgebras associativas definidas por geradores e relações, onde todas as relações são dadas por polinômios quadráticos.

De modo geral uma álgebra quadrática A é gerada por um conjunto de geradores V , e suas relações são dadas por elementos de grau 2 (mais precisamente por combinações bilineares dos geradores) no espaço tensorial $T(V)$. Isso significa que todas as relações são expressas



como polinômios de grau dois. O espaço de relações R está contido em $V \otimes V$, ou seja, todas as relações são combinações lineares de produtos de dois geradores.

Muitas álgebras quadráticas importantes são álgebras de Koszul, o que significa que a álgebra tem uma dualidade natural entre sua resolução livre e sua álgebra dual. Essa propriedade está associada à simplicidade e regularidade de sua estrutura homológica.

Os exemplos mais conhecidos de álgebras quadráticas incluem a Álgebra de Clifford, que está associada a um espaço vetorial e a uma forma quadrática, sendo essencial no estudo da geometria e da física, conforme discutido por (Garling, 2011). Álgebras de Jordan, relacionadas com matrizes simétricas, têm aplicações em física teórica, como descrito por (Jacobson, 1968). Além das as Álgebras de Artin-Schelter, que surgem na geometria não comutativa, conforme explicado por (Martínéz-Villa; Solberg, 2011).

Gelfand, Retakh e Wilson (2001) definiram a álgebra universal das pseudo-raízes Q_n , associada ao reticulado booleano dos subconjuntos de um conjunto finito e apresentaram uma base para essas álgebras. Gelfand et al. (2002) determinaram as séries de Hilbert das álgebras Q_n e $Q_n^!$, onde $Q_n^!$ é a álgebra dual de Q_n . Posteriormente Serconek e Wilson (2004) provaram que as álgebras Q_n são Koszul. As álgebras $A(\Gamma)$ são uma generalização das álgebras Q_n .

Gelfand et al. (2005) introduziram essa nova classe de álgebras $A(\Gamma)$ associadas a grafos Γ orientados em níveis. As relações são definidas associando cada caminho em Γ a um polinômio com coeficientes na álgebra associativa livre sobre o conjunto de arestas e determinando que polinômios dados por caminhos conectando o mesmo par de vértices em $A(\Gamma)$ são iguais. As álgebras $A(\Gamma)$ são casos específicos de álgebras quadráticas. Dentre as propriedades das álgebras quadráticas mais exploradas estão a Dualidade e a Koszulidade. Retakh, Serconek e Wilson (2006) Provaram que quando Γ é um grafo uniforme e tem um único vértice minimal de nível 0, a álgebra $A(\Gamma)$ é uma álgebra quadrática e Koszul.

Fröberg (2023) apresentou diversas caracterizações para as álgebras Koszul, algumas que envolvem propriedades homológicas.

Um importante detalhe a se observar sobre álgebras quadráticas Koszul é que elas satisfazem a seguinte identidade, conhecida como a Fórmula de Fröberg, introduzida por (Fröberg, 1975):

$$H(A, t) \cdot H(A^!, -t) = 1,$$

em que V é o espaço vetorial graduado $V = \sum_i V_i$, e $H(V, t)$ é a série formal

$$H(V, t) = \sum_{i \geq 0} (\dim(V_i)) t^i,$$



desde que $\dim(V_i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

No caso específico das álgebras $A(\Gamma)$ utilizamos,

$$H(t) = \frac{1-t}{1 + \sum_{v_1 > \dots > v_l \geq \star} (-1)^l t^{|v_1| - |v_l| + 1}},$$

determinado por (Retakh; Serconek; Wilson, 2007).

Outra abordagem importante nessa linha trata-se de determinar as funções geradoras do traço graduado de $Aut(A(\Gamma))$ atuando em $A(\Gamma)$. Para isso, cada automorfismo σ do grafo Γ determina um automorfismo da álgebra $A(\Gamma)$ e o grafo Γ^σ que é o subgrafo de Γ , obtido a partir dos vértices fixados por σ . O grafo Γ^σ dá origem à álgebra $A(\Gamma^\sigma)$ que é uma subálgebra da álgebra graduada associada a $A(\Gamma)$, denotada por $gr(A(\Gamma))$. Quando $\sigma \in Aut(\Gamma)$ denotamos por $\Gamma^\sigma = (V_\sigma, E_\sigma)$ o subgrafo de $\Gamma = (V, E)$, obtido do seguinte modo: $\Gamma^\sigma = (V_\sigma, E_\sigma)$, onde $V_\sigma = \{v \in V : \sigma(v) = v\}$ e $E_\sigma = \{e \in E : t(e), h(e) \in V_\sigma\}$, isto é, Γ^σ é o subgrafo de Γ induzido pelos vértices fixados por σ . Duffy (2009) define e estuda as álgebras $A(\Gamma^\sigma)$ para os grafos Γ_{D_n} (grafo de Hasse do conjunto parcialmente ordenado das faces de um polígono regular com n lados) e Θ_n (grafo do reticulado booleano de subconjuntos de um conjunto finito).

Duffy (2009) introduziu o estudo das representações dos automorfismos de $A(\Gamma)$ agindo em $A(\Gamma)$ e na dual $A(\Gamma)^\dagger$, $Aut(A(\Gamma))$ agindo em $(A(\Gamma))^\dagger$. Também introduziu o cálculo das funções geradoras do traço graduado de $Aut(\Gamma)$ agindo em $A(\Gamma)$ e introduziu o seguinte problema, o de verificar a validade da identidade:

$$Tr_\sigma(A(\Gamma), t) \cdot Tr_\sigma(A(\Gamma)^\dagger, -t) = 1. \quad (1)$$

Vasconcelos (2014) mostrou que, sob certas condições, $Aut(A(\Gamma)) = K^* \times Aut(\Gamma)$, em que K é um corpo e $K^* = K \setminus \{0\}$. Portanto para o cálculo das representações irredutíveis de $Aut(A(\Gamma))$ é suficiente calcular as representações irredutíveis de $Aut(\Gamma)$. Caldeira, Lima e Vasconcelos (2019) provaram que se σ e γ são conjugados em $Aut(\Gamma)$ os grafos Γ^σ e Γ^γ são isomorfos, o que permite que funções geradoras do traço graduado sejam calculadas apenas para um dos representantes das classes de conjugação e definiram que uma álgebra que satisfaça essa equação para todo $\sigma \in Aut(A(\Gamma))$ é uma álgebra “tipo-Koszul”.

Uma álgebra $A(\Gamma)$ que satisfaça (1) para todo $\sigma \in Aut(\Gamma)$ é denominada uma álgebra tipo-Koszul. Ocorre que, para o cálculo de $Tr_\sigma(A(\Gamma), t)^\dagger$ é necessário conhecer $Tr_{\sigma, i}$, que denota o traço de σ atuando no $Aut(\Gamma)$ -módulo $A(\Gamma)_{[i]}$, em que:

$$A(\Gamma)_{[i]} = A(\Gamma) \otimes \dots \otimes A(\Gamma), i \text{ fatores.}$$



Vasconcelos (2014) mostrou que $Tr_{\sigma,i}$ coincide com o número de vetores da base de $A(\Gamma)_{[i]}$ σ -fixados, isto é,

$$Tr_{\sigma,i} = \sum_{v \in \mathcal{B}} \delta_{\sigma}(v),$$

em que \mathcal{B} é uma base de $A(\Gamma)_{[i]}$ e $\delta_{\sigma}(v) = \begin{cases} 1, & \sigma(v) = v \\ 0, & \sigma(v) \neq v \end{cases}$.

Neste sentido, um passo importante é determinar uma base para cada $Aut(\Gamma)$ -módulo $A(\Gamma)_{[i]}$. $Tr_{\sigma,i}$ é a i -ésima dimensão graduada da álgebra $A(\Gamma^{\sigma})$ que também é a dimensão de $A(\Gamma^{\sigma})_{[i]}$.

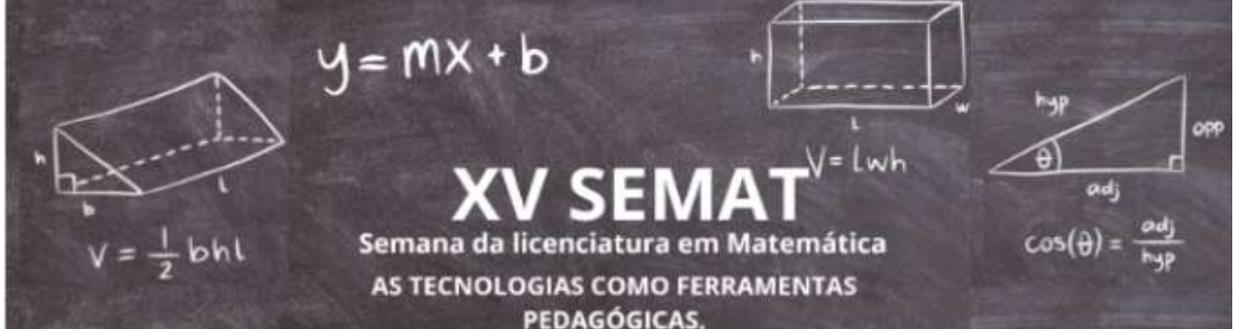
Diversas classes de álgebras têm sido consideradas no desenvolvimento dessa área. Duffy (2009) considerou além das álgebras Q_n , a álgebra $A(\Gamma_{D_n})$ associada aos conjuntos parcialmente ordenados das k -faces de polígonos regulares e mostrou que $A(\Gamma_{D_n})$ são tipo-Koszul. Vasconcelos (2014) considerou as álgebras $A(L(n, q))$, associada ao grafo de Hasse do conjunto de subespaços vetoriais do espaço vetorial finito sobre o corpo F_q . Dirino (2017) considerou a álgebra $A(\Gamma_{P_n})$ associada ao grafo de Hasse do conjunto parcialmente ordenado das k -faces do grafo de Petersen. Caldeira, Lima e Vasconcelos (2019) mostraram que as álgebras $A(\Gamma_{\diamond})$ são tipo-Koszul. Vasconcelos, Fernandes e Lima (2023) mostraram que $Aut(\Gamma_{K_n}) = S_n$, em que S_n calcularam as funções geradoras do traço graduado de S_n agindo em $A(\Gamma_{K_n})$.

Fernandes e Vasconcelos (2024) calcularam as séries de hilbert de algumas classes de álgebras por meio de co-homologia de conjuntos parcialmente ordenados.

2 Metodologia

A metodologia do presente estudo consiste na aplicação de uma abordagem qualitativa para o desenvolvimento de teorias algébricas relacionadas a grafos e suas correspondentes álgebras $A(\Gamma)$. O objetivo principal é realizar uma retomada do histórico da linha de pesquisa “Álgebras associadas a grafos orientados em níveis, $A(\Gamma)$ ”, apresentamos alguns dos principais resultados dessa linha e suas perspectivas futuras. Além disso apresentamos um caso específico em que apresentamos de as funções geradoras do traço graduado de $Aut(A(\Gamma_{K_4}))$ agindo sobre $A(\Gamma_{K_4})$.

O estudo é explicativo, pois visa esclarecer propriedades específicas das álgebras associadas a grafos orientados em níveis, bem como suas implicações na teoria das álgebras Koszul. A pesquisa também se enquadra como documental, uma vez que se baseia em um levantamento profundo de trabalhos anteriores, como os de (Gelfand et al., 2005; Fröberg, 1999; Duffy,



2009), os quais fornecem a fundamentação teórica e os métodos utilizados para calcular as funções geradoras e as representações das álgebras Koszul associadas a grafos.

O processo de investigação será dividido em três etapas:

- Definição e generalização das álgebras $A(\Gamma)$: A álgebra $A(\Gamma)$ será definida a partir de grafos orientados em níveis, com base nos geradores e nas relações entre caminhos em Γ . Essas relações serão usadas para calcular as funções de Hilbert e identificar os traços das representações de automorfismos agindo sobre $A(\Gamma)$.
- Cálculo das funções geradoras do traço graduado de $Aut(A(\Gamma))$: O estudo irá determinar os automorfismos de $A(\Gamma)$ associados a automorfismos do grafo Γ . A metodologia baseia-se na teoria de representações, utilizando a fórmula de Fröberg e o cálculo das séries de Hilbert de álgebras Koszul, bem como a identificação de bases e geradores da álgebra $A(\Gamma^\sigma)$ para subgrafos fixados por automorfismos $\sigma \in Aut(\Gamma)$.
- Validação dos resultados obtidos: Os resultados obtidos são comparados e validados com a literatura existente, focando na aplicabilidade das identidades de Fröberg e suas extensões para álgebras Koszul.

3 Resultados e Discussão

Seja $P(t) = t^2 + a_1t + a_2$ um polinômio com coeficientes em um anel não comutativo e variável central t , com raízes à direita x_1 e x_2 cuja diferença $x_1 - x_2$ é inversível. Isto é,

$$x_i^2 + a_1x_i + a_2 = 0, \quad i = 1, 2,$$

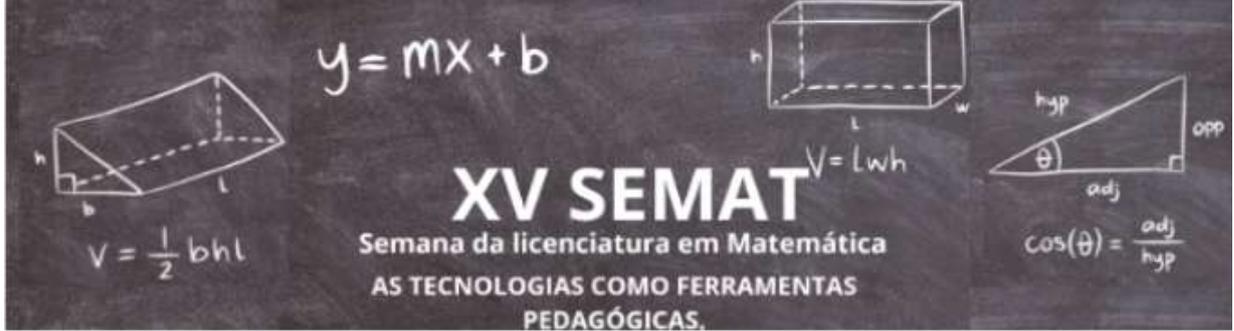
e, existe $(x_1 - x_2)^{-1}$ tal que $(x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_2)^{-1} = 1$.

$P(t)$ admite duas fatorações distintas, uma em função de $x_1, x_{1,2}$ e outra em função de $x_2, x_{2,1}$:

$$P(t) = (t - x_{1,2})(t - x_1) \text{ e } (t - x_{2,1})(t - x_2).$$

em que

$$x_{1,2} = (x_2 - x_1)x_2(x_2 - x_1)^{-1}, \quad x_{2,1} = (x_1 - x_2)x_1(x_1 - x_2)^{-1}.$$



Em outras palavras, temos

$$(t - x_{1,2})(t - x_1) = (t - x_{2,1})(t - x_2).$$

Da última igualdade advém as relações:

$$x_1 + x_{1,2} = x_2 + x_{2,1} \text{ e } x_{1,2}x_1 = x_{2,1}x_2.$$

Vamos considerar a álgebra gerada por $x_1, x_2, x_{1,2}, x_{2,1}$ satisfazendo essas relações.

$$A = \left\{ \sum_{i,j,k,l} \alpha_{ijkl} x_1^i x_2^j x_{1,2}^k x_{2,1}^l, x_1 + x_{1,2} = x_2 + x_{2,1} \text{ e } x_{1,2}x_1 = x_{2,1}x_2 \right\}$$

Essa álgebra está associada ao grafo dos divisores à direita de um polinômio em variáveis não comutativas.

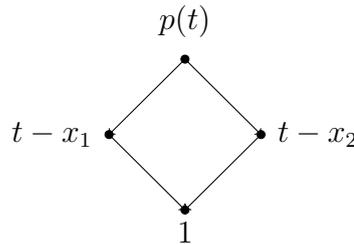


Figura 1: Grafo dos divisores à direita do polinômio $p(t) = t^2 + a_1t + a_2$

Um grafo orientado é um par $\Gamma = (V, E)$ em que V é um conjunto e E é um subconjunto de $V \times V$ e para o qual existem funções $t, h : E \rightarrow V$ definidas por

$$t(e) := \text{vértice inicial de } e, \quad h(e) := \text{vértice final de } e,$$

chamadas, respectivamente, “cauda” e “cabeça”. A aresta $e = (t(e), h(e))$ é dita dirigida de $t(e)$ à $h(e)$.

Um grafo orientado $\Gamma = (V, E)$ é um **grafo em níveis** se podemos escrever

$$V = \bigcup_{i=0}^n V_i, \quad E = \bigcup_{i=1}^n E_i$$

e para $e \in E_i$, $t(e) \in V_i$ e $h(e) \in V_{i-1}$. Se $v \in V_i$ ($e \in E_i$), dizemos que o nível de v é i e denotamos por $|v| = i$.



3.1 A álgebra $A(\Gamma)$

Seja K um corpo e, para qualquer conjunto W seja $T(W)$ a álgebra tensorial de W sobre K .

Para um caminho $\pi = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, no grafo orientado em níveis $\Gamma = (V, E)$, definimos

$$e(\pi, k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}, \text{ ou seja,}$$

$$e(\pi, 1) = e_1 + \dots + e_m,$$

$$e(\pi, 2) = e_1 e_2 + \dots + e_1 e_m + e_2 e_3 + \dots + e_2 e_m + \dots + e_{m-1} e_m,$$

⋮

$$e(\pi, m) = e_1 \dots e_m.$$

Seja R o ideal bilateral de $T(E)$ gerado por

$$\{e(\pi_i, k) - e(\pi_j, k) : t(\pi_i) = t(\pi_j), h(\pi_i) = h(\pi_j), 1 \leq k \leq l(\pi_i)\}.$$

Definição 1 (A álgebra $A(\Gamma)$). $A(\Gamma) = T(E)/R$.

3.2 Série de Hilbert

Seja $V = \bigoplus_{i \geq 0} V_i$ um espaço vetorial $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -graduado e suponha que cada V_i tenha dimensão finita. Definimos a série de Hilbert de V , $H(V, t)$, por

$$H(V, t) = \sum_{i \geq 0} (\dim(V_i)) t^i.$$

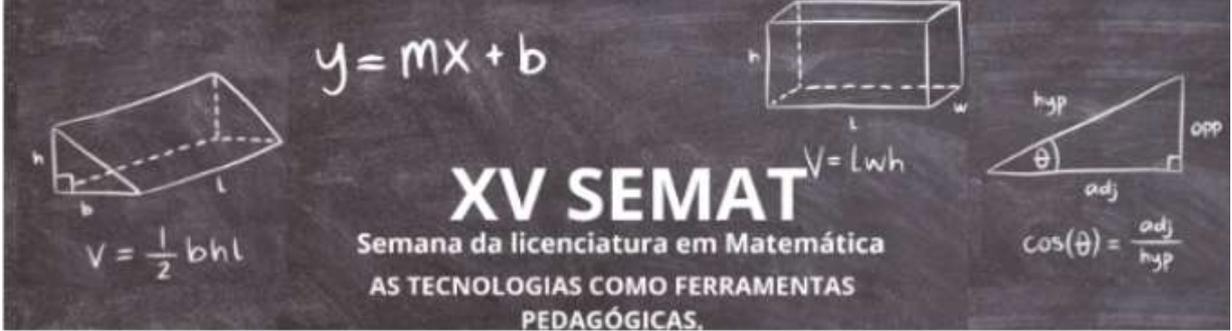
Exemplo 1. Sejam $\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n : a_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ o espaço vetorial dos polinômios em uma indeterminada sobre o corpo \mathbb{R} e $V_i = \mathbb{R} \cdot x^i$.

Neste caso, $\dim_{\mathbb{R}}(V_i) = 1$ para todo inteiro $i \geq 0$. Logo,

$$\sum_{i \geq 0} \dim_{\mathbb{R}}(V_i) t^i = \sum_{i \geq 0} t^i = \frac{1}{1-t}.$$

Portanto,

$$H(\mathbb{R}[x], t) = \frac{1}{1-t}.$$



Exemplo 2. Gelfand et al. (2002) calcularam a Série de Hilbert da álgebra Q_n e da sua dual $Q_n^!$. Dadas por

$$H(Q_n, t) = \frac{1-t}{1-t(2-t)^n}, \quad H(Q_n^!, t) = \frac{1+t(2+t)^n}{1+t}.$$

Observe que elas satisfazem a **fórmula de Fröberg**, isto é,

$$H(Q_n, t) \times H(Q_n^!, -t) = -1.$$

As funções geradoras do traço graduado de $Aut(A(\Gamma))$ atuando em $A(\Gamma)$ são obtidas por meio da equação

$$Tr_\sigma(A(\Gamma), t) = \frac{1-t}{1 + \sum_{\substack{v_1 > \dots > v_l \geq \star \\ v_1, \dots, v_l \in V_\sigma}} (-1)^l t^{|v_1| - |v_l| + 1}},$$

essa fórmula foi determinada em Duffy (2009) generalizando a Fórmula de Fröberg.

3.3 A álgebra $A(\Gamma_{K_4})$

Considere o grafo planar completo em 4 vértices K_4 , conforme a Figura 2.

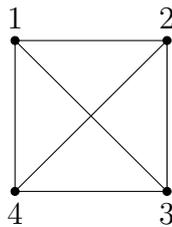


Figura 2: O grafo completo K_4

O grafo orientado em níveis Γ_{K_4} das k -faces de K_4 é dado por $\Gamma_{K_4} = (V, E)$ com $V = \bigcup_{k=0}^3 V_k$, onde $V_0 = \{\star\}$, $V_1 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, $V_2 = \{v_{i,i+1}, v_{i,i+2}, \dots, v_{i,3} \mid i \in \mathbb{Z}_4\}$ e $V_3 = \{u\}$.

Um vértice v_{ij} está conectado a outro w_k se, e somente se, $k = i$ ou $k = j$. Este grafo tem 4 vértices no nível 1, correspondendo aos vértices do grafo K_4 e 6 vértices no nível 2 correspondendo às arestas de K_4 .

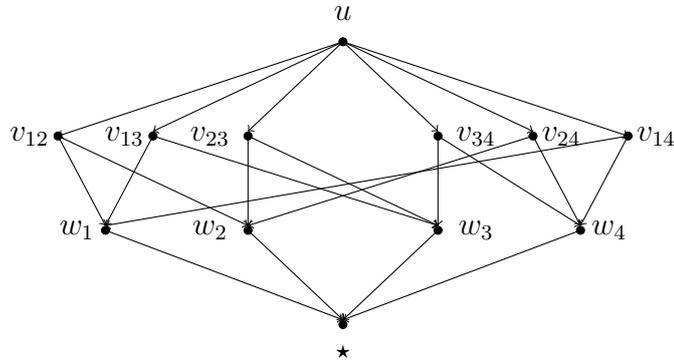
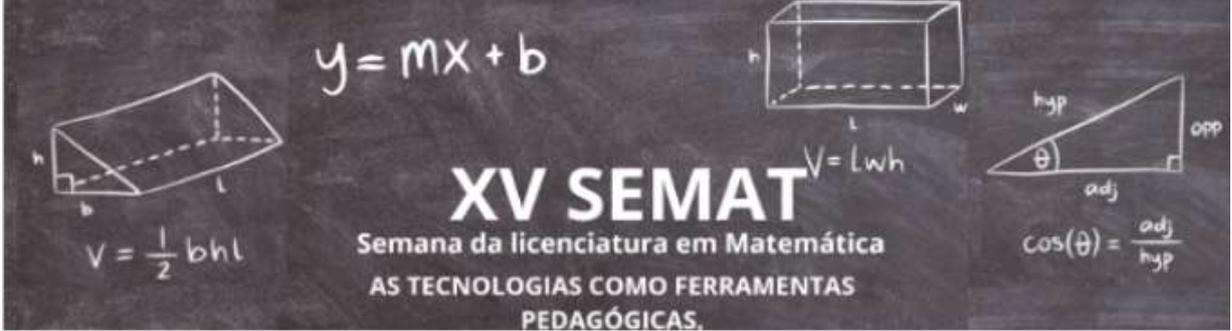


Figura 3: Grafo em níveis Γ_{K_4}

As relações em $A(\Gamma_{K_4})$ são

- $u(v_{ij} - v_{ik}) - v_{ij}^2 + v_{ik}^2 + (v_{ij} - v_{ik})w_i$.
- $v_{ij}(w_i - w_j) - w_i^2 + w_j^2$.

Com $1 \leq i < j \leq 4, 1 \leq i < k \leq 4$ e $j \neq k$.

Proposição 1. Uma base \mathcal{B} de $A(\Gamma_{K_4})$ consiste de \star e do conjunto de todas as palavras em $u, v_{12}, v_{23}, v_{34}, v_{14}, v_{13}, v_{24}, w_1, w_2, w_3, w_4$ tais que as seguintes condições são válidas: as subpalavras $v_{ij}w_k$ ocorrem somente se $k \neq j$. As subpalavras uv_{ij} ocorrem somente se $i = 1$ e $j = 2$, e as subpalavras $uv_{ij}w_k$ ocorrem somente se $i = k = 1$ e $j = 2$.

Demonstração. Para usarmos o Lema do Diamante de Bergman (Bergman, 1978), precisamos colocar uma ordem parcial no conjunto de geradores do seguinte modo $u \geq v_{ij} \geq w_k$, para todos $i, j, k, v_{ij} \geq v_{kl}$, se $i > k$ ou $i = k$ e $j > l$, e $w_i \geq w_j$, se $i > j$. \square

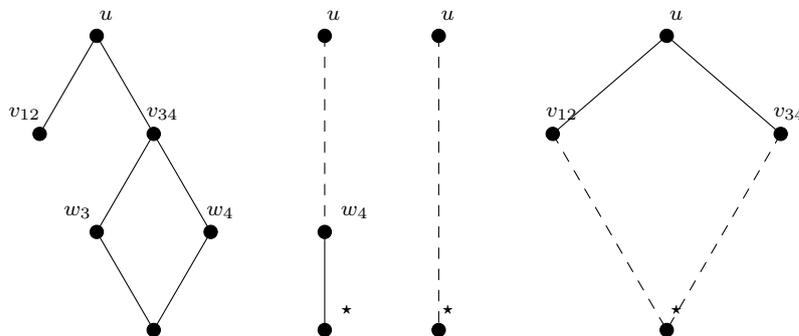


Figura 4: Subgrafos $\Gamma_{K_4}^\sigma$

Proposição 2. $Aut(\Gamma_{K_4}) = S_4$.



Demonstração. Basta observar que os geradores de S_4 , $\theta = (1\ 2)$ e $r = (1\ 2\ 3\ 4)$, pertencem a $Aut(\Gamma_{K_4})$. De fato,

$$\theta(w_i) = w_{\theta(i)} = w_{i+1}.$$

$$\theta(v_{ij}) = v_{\theta(i)\theta(j)} = \begin{cases} v_{12}, & i = 1, j = 2 \\ v_{23}, & i = 1, j = 3 \\ v_{13}, & i = 2, j = 3 \\ v_{24}, & i = 1, j = 4 \\ v_{14}, & i = 2, j = 4 \\ v_{ij}, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

E,

$$r(v_{ii+1}) = v_{r(i)r(i+1)} = v_{i+1i+2}, r(v_{ii+2}) = v_{r(i)r(i+2)} = v_{i+1i+3}.$$

□

O representantes das classes de conjugação de S_4 podem ser tomados por (1) , $(1\ 2)$, $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 2\ 3\ 4)$ e $(1\ 2)(3\ 4)$. As funções geradoras do traço graduado de $Aut(A(\Gamma_{K_4}))$ agindo em $A(\Gamma_{K_4})$ são dadas pelo teorema abaixo

Teorema 1. *As funções geradoras do traço graduado de $Aut(A(\Gamma_{K_4}))$ agindo em $A(\Gamma_{K_4})$ são*

- $Tr_{(1)}(A(\Gamma_{K_4}), t) = \frac{1-t}{1-12t+22t^2-14t^3-3t^4};$
- $Tr_{(12)}(A(\Gamma_{K_4}), t) = \frac{1-t}{t^4-t^3+6t^2-6t+1};$
- $Tr_{(123)}(A(\Gamma_{K_4}), t) = \frac{1-t}{t^3+t^2-3t+1};$
- $Tr_{(1234)}(A(\Gamma_{K_4}), t) = \frac{1-t}{t^4-2t+1};$
- $Tr_{(12)(34)}(A(\Gamma_{K_4}), t) = \frac{1-t}{-t^4+2t^3+2t^2-4t+1};$

4 Considerações finais

Apresentamos as álgebras associadas a grafos orientados em níveis, $A(\Gamma)$, que constituem uma classe significativa de estruturas algébricas, com relações definidas a partir de caminhos nos grafos. Tais álgebras, introduzidas por Gelfand et al. (2005), desempenham um papel



importante na representação de grafos orientados, onde as relações entre os vértices e arestas são expressas por polinômios bilineares.

Apresentamos alguns dos principais resultados relativos a essa teoria. Introduzimos o cálculo das séries de Hilbert e as apresentações dessas álgebras. Fornecemos uma caracterização dessas álgebras em relação à sua kszulidade e discutimos o problema da tipo-kszulidade.

Finalmente, tratamos do caso específico de $A(\Gamma_{K_4})$, onde apresentamos uma base para a álgebra e calculamos as funções geradoras do traço graduado de S_4 agindo em $A(\Gamma_{K_4})$.

5 Agradecimentos

Agradecemos ao grupo de pesquisa em matemática aplicada e álgebra (GPMAT) do IFG/Goiânia.

Referências

BERGMAN, George M. The diamond lemma for ring theory. **Advances in mathematics**, Elsevier, v. 29, n. 2, p. 178–218, 1978.

CALDEIRA, Jhone; LIMA, Aline De Souza; VASCONCELOS, José Eder Salvador De. **Representations of automorphism groups of algebras associated to star polygons**. **Journal of Algebra and Its Applications**, World Scientific, p. 195 – 1974, 2019.

DIRINO, Kariny De Andrade. **Um estudo sobre álgebras associadas a alguns grafos orientados em níveis**. Universidade Federal de Goiás, 2017. Disponível em: <<https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/7784>>.

DUFFY, Colleen. **Representations of $Aut(A(\Gamma))$ acting on homogeneous components of $A(\Gamma)$ and $A(\Gamma)^!$** . **Advances in Applied Mathematics**, v. 42, p. 94–122, 2009.

FERNANDES, Karoline Victor; VASCONCELOS, José Eder Salvador de. Hilbert series of some layered directed graphs way co-homology of poset. subited to Algebra and discrete mathematics, 2024.

FRÖBERG, Ralph. **Determination of a class of Poincaré series**. **Mathematica Scandinavica**, JSTOR, v. 37, n. 1, p. 29–39, 1975.

_____. **Koszul algebras**. **Lecture notes in pure and applied mathematics**, MARCEL DEKKER AG, p. 337–350, 1999.

_____. Koszul algebras. In: **Advances in commutative ring theory**. [S.l.]: CRC Press, 2023. p. 337–350.



GARLING, David JH. **Clifford algebras: an introduction**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. v. 78.

GELFAND, Israel; GELFAND, Sergei; RETAKH, Vladimir; SERCONEK, Shirlei; WILSON, Robert Lee. **Hilbert series of quadratic algebras associated with pseudo-roots of noncommutative polynomials**. *Journal of Algebra*, Elsevier, v. 254, n. 2, p. 279–299, 2002.

GELFAND, Israel; RETAKH, Vladimir; SERCONEK, Shirlei; WILSON, Robert Lee. **On a class of algebras associated to directed graphs**. *Selecta Mathematica*, Springer, v. 11, n. 2, p. 281, 2005.

GELFAND, Israel; RETAKH, Vladimir; WILSON, Robert Lee. **Quadratic linear algebras associated with factorizations of noncommutative polynomials and noncommutative differential polynomials**. *Selecta Mathematica*, Springer, v. 7, n. 4, p. 493–523, 2001.

JACOBSON, Nathan. **Structure and representations of Jordan algebras**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1968. v. 39.

MARTÍNÉZ-VILLA, Roberto; SOLBERG, Øyvind. Artin–schelter regular algebras and categories. *Journal of pure and applied algebra*, Elsevier, v. 215, n. 4, p. 546–565, 2011.

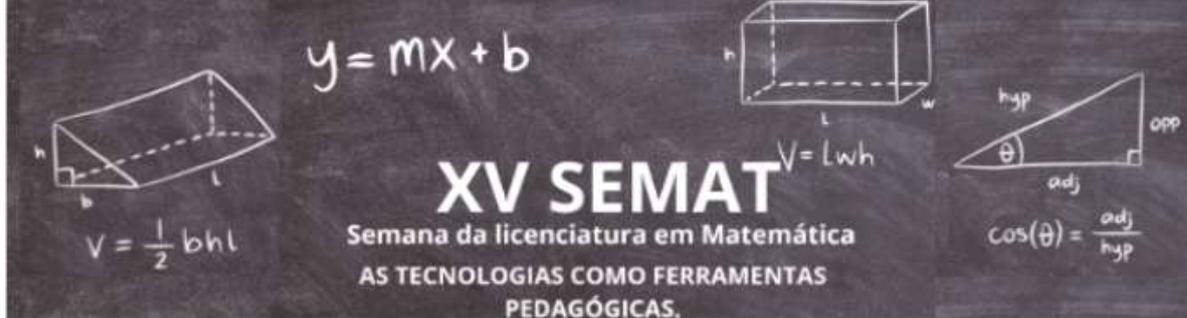
RETAKH, Vladimir; SERCONEK, Shirlei; WILSON, Robert Lee. **On a class of Koszul algebras associated to directed graphs**. *Journal of Algebra*, Elsevier, v. 304, n. 2, p. 1114–1129, 2006.

_____. **Hilbert series of algebras associated to directed graphs**. *Journal of Algebra*, v. 312, p. 142–151, 2007.

SERCONEK, Shirlei; WILSON, Robert Lee. **The quadratic algebras associated with pseudo-roots of noncommutative polynomials are Koszul algebras**. *Journal of Algebra*, Elsevier, v. 278, n. 2, p. 473–493, 2004.

VASCONCELOS, José Eder Salvador. **Álgebras associadas a grafos orientados em níveis e a propriedade da Koszulidade**. Universidade Federal de Goiás, 2014. Disponível em: <<https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/4444>>.

VASCONCELOS, José Eder Salvador; FERNANDES, Karoline Victor; LIMA, Márcio Dias. **Graded trace generating functions of $Aut(\Gamma_{K_n})$ acting on $A(\Gamma_{K_n})$** . *Journal of algebra and its applications*, World Scientific, p. 2550150, 2023.



UMA ABORDAGEM TEÓRICA SOBRE OS CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE SEMIGRUPO NUMÉRICO

Naamã Galdino da Silva Neris (IFG/Câmpus Goiânia - naama.neris@ifg.edu.br)

Átila Felipe de Souza Figueredo (UFMG - desouzaatilafelipe@gmail.com)

Resumo

O objetivo deste trabalho é o estudo dos conceitos básicos sobre semigrupo numérico. Para isto, será apresentado a definição de semigrupo numérico, destacando seus invariantes, a saber: gênero, multiplicidade, número de Frobenius e condutor. Definirei o conjunto de geradores minimais e o conjunto de Apéry. Além disso, caracterizarei algumas famílias de semigrupos numéricos através de determinadas propriedades.

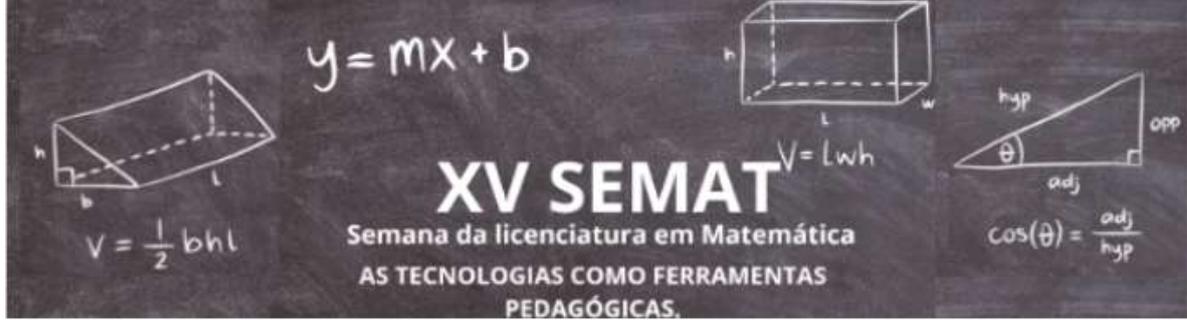
Palavras-chave: Semigrupo Numérico. Invariantes. Semigrupo Simétrico. Semigrupo Pseudo-Simétrico.

1 Considerações iniciais

Um semigrupo numérico é um subconjunto não vazio S de \mathbb{N} que é fechado para a adição, contém o elemento 0 e cujo complemento em \mathbb{N} é finito. O conjunto complementar do semigrupo numérico S é o conjunto das lacunas $G = \mathbb{N} \setminus S$.

No final do século XIX, vários matemáticos como, Frobenius e Sylvester, foram atraídos pela simplicidade do conceito de semigrupo numérico, que permite enunciar problemas fáceis de compreender, mas cuja resolução está longe de ser trivial. Foi assim que surgiu o problema de Frobenius, o qual desejava encontrar uma fórmula dependendo de n_1, \dots, n_k para o maior inteiro não pertencente a $\langle n_1, \dots, n_k \rangle$.

Durante a segunda metade do século XX os semigrupos numéricos voltaram a ser estudados, principalmente devido às suas aplicações na Geometria Algébrica.



2 Desenvolvimento

Na sequência, definirei semigrupo numérico com seus principais invariantes e propriedades. A fundamentação teórica desta seção se baseia no livro de (Rosales; García-Sánchez, 2009) e nos trabalhos de (Galdino, 2017) e (Nicolau, 2010).

Definição 1. Um *semigrupo numérico* S é um subconjunto dos números naturais \mathbb{N} , que satisfaz as seguintes condições:

- (i) $0 \in S$;
- (ii) Se $a, b \in S$, então $a + b \in S$;
- (iii) $\mathbb{N} \setminus S$ é finito.

Denotaremos um semigrupo numérico da seguinte forma

$$S = \{0, s_1, s_2, \dots, s_n, \longrightarrow\}$$

onde $s_i > s_j$ para $i > j$ e a seta significa que todos os elementos de \mathbb{N} a partir de s_n pertencem a S .

Dizemos que s_1 é a *multiplicidade de S* e o denotamos por $m(S)$, s_n é o *condutor de S* e será denotado por $\beta(S)$, ou simplesmente β . Definimos $F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S)$ o *número de Frobenius de S* . Observe que $F(S) = \beta - 1$. Os elementos do conjunto $G(S) = \mathbb{N} \setminus S$ são chamados *lacunas de S* e a cardinalidade, $g(S)$, de $G(S)$ é chamada de *gênero de S* .

Todo semigrupo numérico é finitamente gerado. De fato, note que

$$S = \langle s_1, \dots, s_n = \beta, \beta + 1, \dots, \beta + s_1 - 1 \rangle, \quad (1)$$

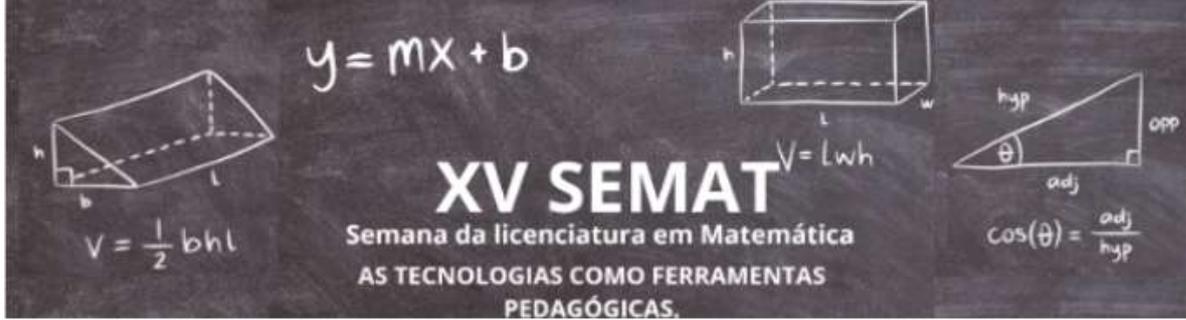
Consideremos $H = \{s_1, \dots, s_n = \beta, \beta + 1, \dots, \beta + s_1 - 1\}$.

Como $S = \{0, s_1, s_2, \dots, s_n, \longrightarrow\}$, é fácil ver que todos os elementos de H estão contidos em S . Por outro lado,

$$0, s_1, \dots, s_n \in \langle s_1, \dots, s_n = \beta, \beta + 1, \dots, \beta + s_1 - 1 \rangle.$$

Agora, seja um elemento $a \in S$ tal que $a > s_n = \beta$. Pelo algoritmo de Euclides existem $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $a = q\beta + r$, com $q \geq 1$ e $0 \leq r < \beta$.

Se $r = 0$, temos que $a = q\beta$. Logo, $a \in \langle s_1, \dots, s_n = \beta, \beta + 1, \dots, \beta + s_1 - 1 \rangle$. Agora, se $0 < r < \beta$, dividimos r por s_1 e encontramos $q_1, r_1 \in \mathbb{N}$ tal que $r = q_1 s_1 + r_1$ com



$0 \leq r_1 < s_1$. Então

$$a = (q\beta + r) = q\beta + q_1s_1 + r_1 = (q-1)\beta + q_1s_1 + \beta + r_1 \Rightarrow$$

$$a \in \langle s_1, \dots, s_n = \beta, \beta + 1, \dots, \beta + s_1 - 1 \rangle,$$

pois $(q-1) \in \mathbb{N}$.

Chamaremos conjunto minimal de geradores de S o conjunto de elementos de S que geram S e tal que nenhum elemento desse conjunto pode ser obtido, como combinação linear com coeficientes lineares, a partir de outros. Pela fórmula (1), para encontrar o conjunto minimal de geradores de S , basta tirar do conjunto de geradores aqueles que são soma de dois anteriores.

Proposição 1. *O conjunto minimal de geradores de S é único.*

Demonstração 1. *Suponha por absurdo que existam dois conjuntos geradores distintos de S . Sejam estes conjuntos $G_1 = \{g_1, \dots, g_n\}$ e $G_2 = \{h_1, \dots, h_m\}$. Suponhamos G_1 e G_2 distintos e que existe $g' \in G_1 \setminus G_2$. Daí $g' \in S$. Além disso, como G_2 é um conjunto gerador de S , temos que $g' = \sum_{i=1}^m a_i h_i$, onde $a_i \in \mathbb{N}^*$ e $h_i \in G_2, \forall i = 1, \dots, m$. Agora, como $h_i \in S$ e G_1 é*

conjunto gerador de S , então $h_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j$ com $b_{ij} \in \mathbb{N}^$ e $g_j \in G_1, \forall j = 1, \dots, n$. Logo,*

$$g' = \sum_{i=1}^m a_i \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} g_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_{ij} g_j,$$

isto é, g' é combinação linear com coeficientes positivos de outros elementos do conjunto G_1 . Absurdo, pois G_1 é conjunto gerador minimal. Portanto $G_1 \subset G_2$. Analogamente, mostramos que $G_2 \subset G_1$.

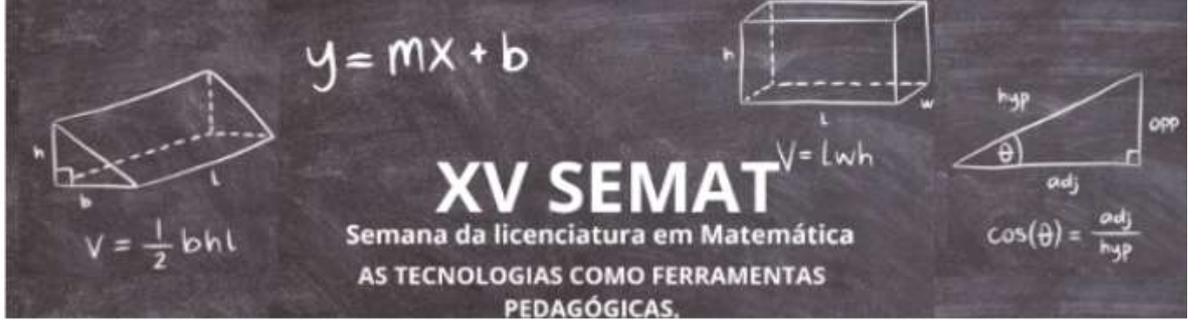
Lema 1. *Seja $H = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. Então H é um semigrupo numérico se, e somente se, $\text{mdc}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$.*

Demonstração 2. *Suponhamos que $\text{mdc}(a_1, a_2, \dots, a_n) = d \neq 1$. Pela propriedade do mdc, temos que $d|a_i$ para cada $1 \leq i \leq n$, ou seja, $a_i = dk_i$ para cada $1 \leq i \leq n$.*

Tome $h \in H$. Então, $h = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$. Daí, segue que,

$$h = dk_1x_1 + dk_2x_2 + \dots + dk_nx_n \Rightarrow h = d(k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n),$$

ou seja, $H \subseteq \langle d \rangle = \{kd; k \in \mathbb{N}\}$. Assim, $\mathbb{N} \setminus \langle d \rangle \subseteq \mathbb{N} \setminus H$.



Se $d \neq 1$, existe $e \in \mathbb{N}$ com $d < e < 2d$ tal que

$$\{e + n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \langle d \rangle \subseteq \mathbb{N} \setminus H.$$

Isso implica que $\mathbb{N} \setminus \langle d \rangle$ não é finito. Absurdo, pois como H é um semigrupo numérico, $\mathbb{N} \setminus H$ é finito. Logo, $d = 1$. Para mostrar a recíproca, é suficiente provar que $\mathbb{N} \setminus H$ é finito.

Como $\text{mdc}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$, existem inteiros z_1, \dots, z_n e $a_1, \dots, a_n \in H$ tais que $z_1 a_1 + \dots + z_n a_n = 1$. Movendo esses termos com z_i negativo para o lado direito, podemos encontrar $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \in \{1, \dots, n\}$ tais que $z_{i_1} a_{i_1} + \dots + z_{i_k} a_{i_k} = 1 - z_{j_1} a_{j_1} - \dots - z_{j_l} a_{j_l}$. Seja $h = -z_{j_1} a_{j_1} - \dots - z_{j_l} a_{j_l}$. Então, $h \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ e $h + 1 = z_{i_1} a_{i_1} + \dots + z_{i_k} a_{i_k} \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

Provaremos que se $n \in \mathbb{N}$ for tal que $n \geq (h - 1)h + (h - 1)$, então $n \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. De fato, dado $n \geq (h - 1)h + (h - 1)$, sejam $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $n = qh + r$, com $0 \leq r \leq h - 1$.

Como por hipótese $n \geq (h - 1)h + (h - 1)$, temos que

$$qh + r > (h - 1)h + (h - 1) \Rightarrow q \geq h - 1 \geq r.$$

Logo

$$n = (rh + r) + (q - r)h = r \underbrace{(h + 1)}_{\in H} + (q - r) \underbrace{h}_{\in H}.$$

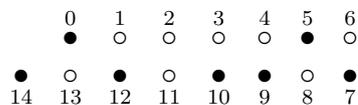
Definição 2. A cardinalidade do conjunto minimal de geradores de S , é chamada de **dimensão de mergulho** de S e, denotamos por $e(S)$.

Observação 1. Se $e(S) = 1$, então $S = \mathbb{N}$.

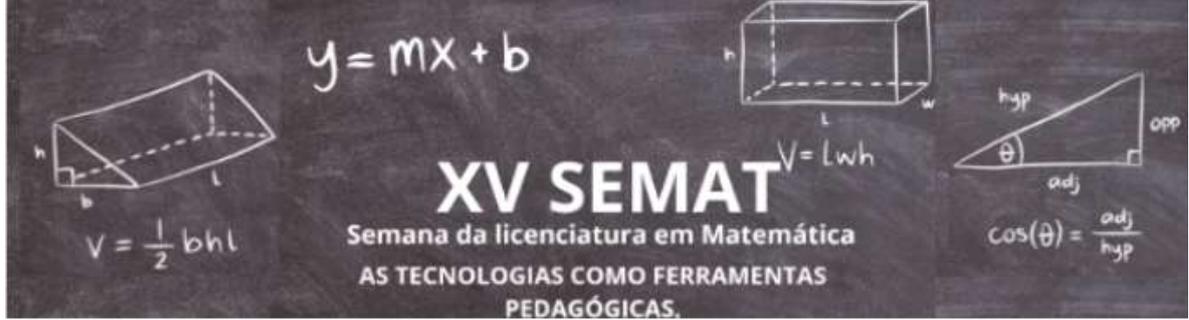
Exemplo 1. Se m é um inteiro positivo, então $S = \{0, m, \rightarrow\}$ é um semigrupo numérico com multiplicidade m . Pela fórmula (1), temos que $S = \langle m, m + 1, \dots, 2m - 1 \rangle$.

Exemplo 2. Seja $S = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14, \rightarrow\}$. Temos que $S = \langle 5, 7, 9 \rangle$. Logo, $m(S) = 5$, $F(S) = 13$, $G(S) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 13\}$ e $g(S) = 8$.

Figura 1: Diagrama do semigrupo $S = \langle 5, 7, 9 \rangle$



Fonte: Diagrama elaborado pelo autor



O diagrama acima, usado para representar semigrupos, é construído da seguinte forma: na primeira coluna coloca-se o condutor de S e em cada coluna a partir da segunda coloca-se dois inteiros cuja soma o número de Frobenius, listados em ordem crescente na linha superior e decrescente na inferior. Bolinhas pretas indicam os elementos que pertencem a S e bolinhas brancas indicam os elementos de $\mathbb{N} \setminus S$.

Exemplo 3. Seja $S = \{0, 4, 7, 8, 9, 11, \rightarrow\}$. Temos que $S = \langle 4, 7, 9 \rangle$. Logo, $m(S) = 4$, $F(S) = 10$, $G(S) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10\}$ e $g(S) = 6$.

Figura 2: Diagrama do semigrupo $S = \langle 4, 7, 9 \rangle$

	0	1	2	3	4	5
	●	○	○	○	●	○
●	○	●	●	●	○	○
11	10	9	8	7	6	5

Fonte: Diagrama elaborado pelo autor

Definição 3. Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. O conjunto de Apéry de S em relação a n é definido por

$$Ap(S, n) = \{s \in S \mid s - n \notin S\}.$$

Exemplo 4. Seja $S = \langle 4, 7, 9 \rangle$. Então, $Ap(S, 8) = \{0, 4, 7, 9, 11, 13, 14, 18\}$.

Não existe fórmula geral conhecida para o número de Frobenius, nem para o gênero, quando semigrupos numéricos possuem dimensão de mergulho maior que dois. No entanto, se o conjunto de Apéry de algum elemento do semigrupo numérico não nulo é conhecido, então ambos os invariantes são fáceis de computar.

Proposição 2. Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. Então,

$$(1) F(S) = (\max Ap(S, n)) - n$$

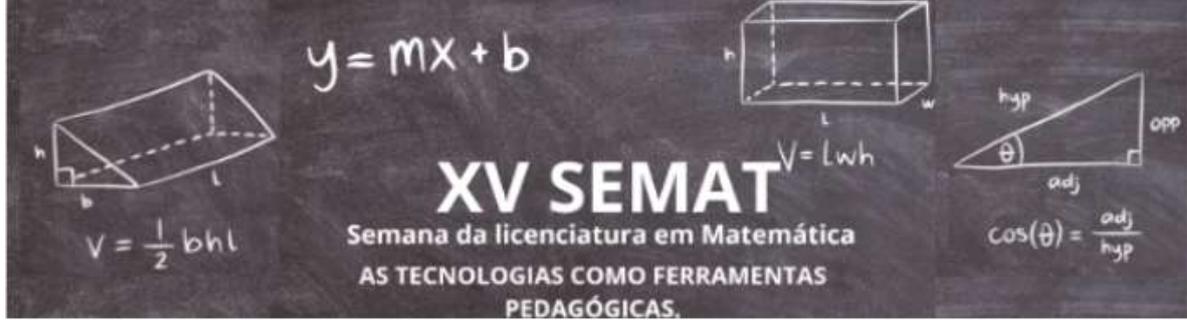
$$(2) g(S) = \frac{1}{n} \left(\sum_{u \in Ap(S, n)} w \right) - \frac{n-1}{2}.$$

Demonstração 3. Ver [2], Proposição 2.12, pág. 10.

Se S é um semigrupo numérico minimamente gerado por $\langle a, b \rangle$, então

$$Ap(S, a) = \{0, b, 2b, \dots, (a-1)b\},$$

e, pela proposição anterior, tem-se o seguinte resultado:



Proposição 3. *Sejam a e b inteiros positivos com $\text{mdc}(a, b) = 1$. Então,*

$$(1) F(\langle a, b \rangle) = ab - a - b,$$

$$(2) g(\langle a, b \rangle) = \frac{ab - a - b + 1}{2}.$$

Para um semigrupo numérico de dimensão de mergulho dois, $g(S) = (F(S) + 1)/2$ (e, assim, $F(S)$ é sempre um inteiro ímpar). Isso não é válido para casos em que a dimensão de mergulho é maior que dois, mas nos dá uma caracterização interessante sobre classes de semigrupos numéricos, que veremos adiante.

Se S é um semigrupo numérico e $s \in S$, então $F(S) - s \notin S$. A partir disso, obtemos o seguinte resultado.

Lema 2. *Seja S um semigrupo numérico. Então*

$$g(S) \geq \frac{F(S) + 1}{2}.$$

Assim, os semigrupos numéricos para os quais a igualdade é válida são semigrupos numéricos com o menor número possível de lacunas, isto é, quando $F(S)$ é ímpar.

Definição 4. *O conjunto $M := \{s \in S \mid s > 0\}$ é chamado de **ideal maximal** de S .*

Observe que, se $S = \langle n_1, \dots, n_k \rangle$, então

$$e(S) = \text{card}(M \setminus 2M),$$

pois não é difícil verificar que $M \setminus 2M = \{n_1, \dots, n_k\}$.

Definição 5. *Seja S um semigrupo numérico. Definimos o **tipo** de S por*

$$t(S) := \text{card}((S - M) \setminus S).$$

Se $S \neq \mathbb{N}$, definimos $T := (S - M) \setminus S$.

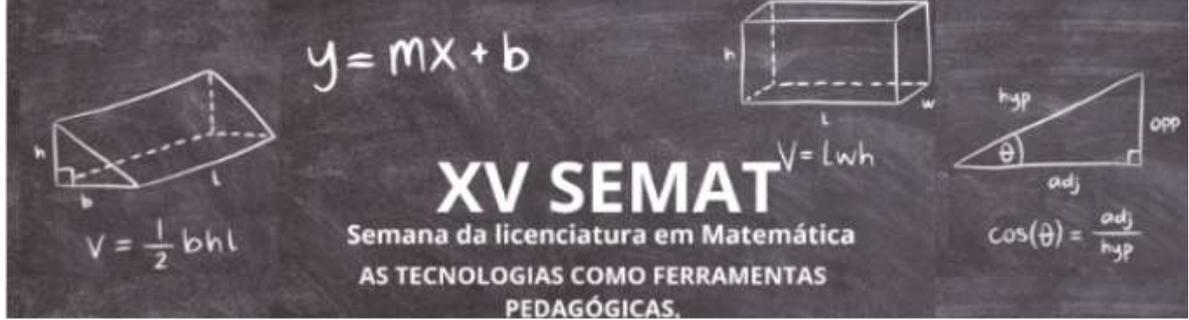
Exemplo 5. *Seja $S = \{0, 4, 5, 7, \rightarrow\}$. Como $S - M = \{x \mid x + M \subseteq S\}$, então*

$$M = \{4, 5, 7, \rightarrow\}$$

$$S - M = \{3, 4, 5, 6, 7, \rightarrow\}$$

$$T = \{3, 6\}$$

Portanto, $t(S) = 2$.



Exemplo 6. Para $S = \langle a, b \rangle$, tem-se que $T = \{ab - a - b\}$. Logo, $t(S) = 1$.

Definição 6. Um semigrupo numérico S é **Arf** se para todos $x, y, z \in S$, com $x \geq y \geq z$, então $x + y - z \in S$.

Exemplo 7. Se m é um inteiro positivo, então $\{0, m, \rightarrow\}$ é um semigrupo numérico com a propriedade Arf.

Definição 7. Um semigrupo numérico S é chamado **simétrico** se para todo $z \in \mathbb{Z}$, $z \notin S$ se, e somente se, $F(S) - z \in S$. Um semigrupo S é chamado **pseudo-simétrico** se $z \notin S$ se, e somente se, $F(S) - z \in S$ ou $z = \frac{F(S)}{2}$.

Exemplo 8. No diagrama abaixo, o semigrupo $S_1 = \langle 3, 5 \rangle$ é simétrico e, $S_2 = \langle 5, 6, 7, 9 \rangle$ é pseudo-simétrico.

Figura 3: Diagrama



Fonte: Diagrama elaborado pelo autor

Considere o conjunto

$$K := \{a \in \mathbb{Z} \mid F(S) - a \notin S\}.$$

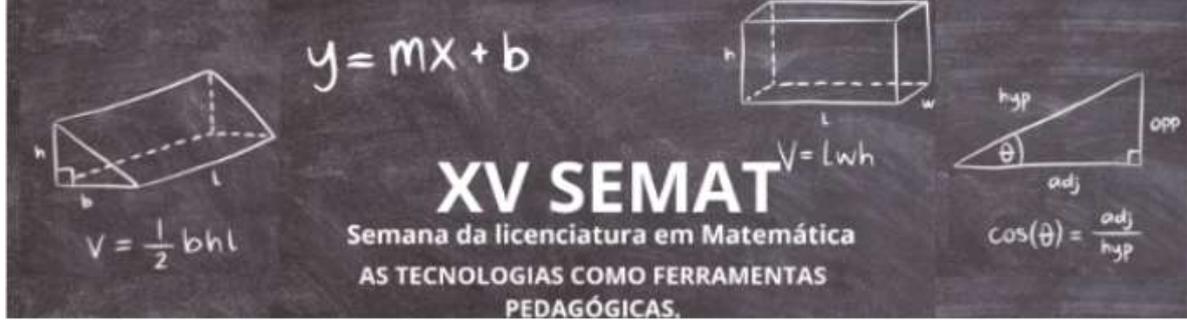
Então, S é simétrico se, e somente se, $S = K$, ou seja, $t(S) = 1$. Agora, se

$$L := \{a \in \mathbb{N} \mid a \notin S \text{ e } F(S) - a \notin S\}$$

temos que: (i) se $L = \emptyset$, então S é simétrico, (ii) se $L = \{F(S)/2\}$, então S é pseudo-simétrico.

Definição 8. Um semigrupo numérico S é chamado de **quase simétrico** se $L(S) \subseteq T(S)$.

Exemplo 9. Seja $S = \{0, 4, 5, 7, \rightarrow\}$. Temos que $S - M = \{3, 4, 5, 6, 7, \rightarrow\}$, $T = \{3, 6\}$ e $L = \{3\}$. Assim $L \subset T$ e, portanto, S é quase-simétrico.



Proposição 4. *São equivalentes:*

- (1) S é quase simétrico.
- (2) $T(S) = L(S) \cup F(S)$
- (3) $M = K + M$.

Demonstração 4. Ver [3], Proposição 3.35, pág. 33.

Observação 2. *Pela proposição anterior, S é quase simétrico se, e somente se, $T = L \cup F(S)$ se, e somente se, $T = (K \setminus S) \cup F(S)$.*

3 Considerações finais

Ao longo deste trabalho, estudamos os conceitos básicos sobre semigrupo numérico, destacando seus invariantes e algumas propriedades que foram importantes para definir algumas famílias de semigrupo numérico.

Os semigrupos Arf, simétrico e pseudo-simétrico desempenham um papel significativo em várias áreas da Matemática. Na Geometria Algébrica por exemplo, os semigrupos Arf aparecem em contextos que envolvem a classificação de curvas e superfícies, já os semigrupos simétricos e pseudo-simétricos, são ferramentas essenciais que permitem uma análise mais robusta de simetrias, singularidades e propriedades geométricas.

Portanto, o estudo de semigrupos numéricos não apenas enriquece a Matemática teórica, mas também abre portas para soluções práticas em problemas contemporâneos.

Referências

- GALDINO, Naamã. **Estudo Local de Curvas Singulares via Valorizações e Semigrupos.** Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora - Juiz de Fora - MG, 2017.
- J. C. Rosales, P. A. García-Sánchez. **Numerical Semigroups.** Developments in Mathematics, 20. Springer, New York, 2009.
- NICOLAU, Danielle. **Semigrupos de Anéis Quase Gorenstein, Arf e Kunz.** Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, 2010.

Parte III

Matemática Aplicada



ANALISANDO FUNDOS DE INVESTIMENTOS UTILIZANDO A LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO PYTHON

Andréia Ribeiro de Faria - (IFG – Câmpus Goiânia. andreiaribe910@gmail.com)

Márcio Dias de Lima - (IFG – Câmpus Goiânia. marcio.lima@ifg.edu.br)

Resumo

Este estudo tem como objetivo apresentar uma introdução ao conceito de fundos imobiliários e aos princípios de investimento, com ênfase na aplicação da linguagem de programação Python para análise e comparação entre dois diferentes fundos de investimentos imobiliários. A escolha desses exemplos de investimento visa oferecer uma interpretação acessível, demonstrando os cálculos e o código utilizados para agilizar o processo de cálculo e aprimorar a visualização da aplicação dos juros compostos no contexto dos fundos imobiliários.

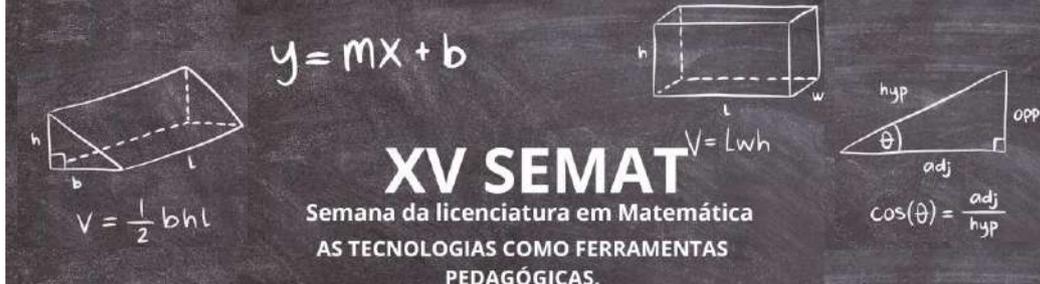
Palavras-chave: Análise de Investimentos. Linguagem de programação Python. Fundos Imobiliários.

1 Introdução

A Comissão de Valores Mobiliários é encarregada de regular, autorizar e supervisionar a criação, operação e gestão dos Fundos de Investimento Imobiliário. A configuração desses fundos possibilita que os investidores diversifiquem suas aplicações, tendo acesso a propriedades em diversos segmentos e regiões, o que é especialmente pertinente em um mercado que se globaliza progressivamente. Ademais, a lei brasileira autoriza os FII a investir não somente em propriedades, mas também em títulos e valores mobiliários correlatos, expandindo assim as possibilidades de investimento (B3, 2024).

A avaliação de FII exige a utilização de métodos específicos que levam em conta fatores como o tamanho do fundo, a quantidade de propriedades e a distribuição dos ativos. Pesquisas sugerem que fundos imobiliários podem ser uma boa opção para investir. O uso de linguagens de programação, como Python e R, tem se popularizado na análise de dados financeiros, possibilitando a modelagem e a simulação de cenários que auxiliam os investidores a compreenderem de forma mais aprofundada o comportamento dos FII (Barbosa Filho, 2024). Tais instrumentos são fundamentais para a realização de análises estatísticas e a apresentação de dados, auxiliando na tomada de decisões baseadas em evidências empíricas.

Os Fundos Imobiliários têm se destacado como uma opção de investimento cada vez mais apreciada, tanto por investidores individuais quanto por investidores institucionais. Pesquisas



recentes sugerem que entender os números que envolve esses fundos é um passo importante antes de adquiri-lo. Esses fundos podem oferecer dados interessantes sobre a lucratividade e os perigos ligados a esse tipo de investimento (Explorer, 2023). A aplicação da matemática financeira nos Fundos de Investimento Imobiliário permite que se entenda a matemática financeira presente nesses fundos. Como calcular o Valor Presente Líquido (VPL), a Taxa Interna de Retorno (TIR), entre outros indicadores cruciais para a decisão de investimentos? A utilização desses princípios matemáticos em Fundos de Investimento Imobiliário é crucial para avaliar a viabilidade de projetos de investimento, particularmente em um cenário econômico em constante mudança como o atual.

O portal da Comissão de Valores Mobiliários (CVM) do Brasil é uma ferramenta indispensável para obter informações regulatórias e atualizações do mercado. A agenda regulatória para 2024, que inclui novas normas para consultores de investimento e ofertas públicas de valores mobiliários é um dos destaques. A CVM também destaca a incorporação de ações de sustentabilidade em suas regulamentações, demonstrando um comprometimento com o progresso sustentável do setor financeiro. Adicionalmente, o site oferece notificações e atualizações direcionadas ao mercado, incluindo circulares e ações sancionatórias, além de um boletim focado no setor agroindustrial. Fornece dados e informações detalhadas sobre a indústria. Esses recursos tornam o site da CVM um recurso valioso para profissionais e pesquisadores que desejam acompanhar as tendências regulatórias e o rendimento dos mercados financeiros e setoriais.

Azevedo (2024) empregou métodos de ciência de dados para examinar o mercado de ações, nesse estudo a coleta de dados foi feita através de scraping na web, seguida de limpeza e organização em um DataFrame. Na análise exploratória de dados (EDA), as informações foram segmentadas. Com base nisso, criou-se um algoritmo para reconhecer as melhores estratégias em cada área. O estudo demonstrou como o uso de Python e bibliotecas como o Pandas Matplotlib pode acelerar a escolha das melhores estratégias.

A linguagem de programação Python tem se mostrado eficaz na análise de grandes quantidades de dados, graças à sua versatilidade e ampla variedade de bibliotecas disponíveis. No âmbito dos investimentos imobiliários, Python é especialmente benéfico para o tratamento e avaliação de informações financeiras, possibilitando a automatização de operações matemáticas complexas e a visualização de tendências de mercado (Mobiliários, 2023) Bibliotecas como Pandas e Numpy são frequentemente empregadas na manipulação de dados, enquanto programas de visualização, como Matplotlib e Seaborn, possibilitam uma análise gráfica minuciosa dos



resultados obtidos.

2 Metodologia

Este estudo utiliza uma metodologia que se fundamenta em uma pesquisa bibliográfica exploratória, utilizando a linguagem de programação Python para analisar investimentos imobiliários.

Revisão Bibliográfica: Primeiramente, conduziu-se uma pesquisa bibliográfica extensa para entender os princípios básicos dos fundos imobiliários. Posteriormente, a pesquisa foi segmentada em artigos sobre análises de investimentos imobiliários e um estudo de como analisar esses dados utilizando a linguagem de programação Python. O objetivo consistiu em alcançar a compreensão profunda dos princípios fundamentais, como sintaxe, estruturas de dados, manipulação de arquivos e outros recursos pertinentes para a análise de dados. Esta pesquisa abordará o uso de ferramentas como Pandas, NumPy e Matplotlib, fundamentais para a manipulação e apresentação de dados.

Formulação do Problema: Posteriormente a revisão bibliográfica, foi selecionado um investimento para que se apresentasse os conceitos da matemática financeira e análise de investimentos. Essa demonstração foi feita para a visualização para aplicação da análise matemática no fundo de investimento imobiliário.

Administração da fórmula dos juros Compostos que é utilizada para calcular o montante recebido de um certo capital, capital o é o calor aplicado no investimento.

Seja mostrado o código utilizado para analisar os dados dos dois fundos que serão analisados e mostrar os valores a serem recebidos em até um ano, mas pode ser prolongado, 5 anos, 6 anos ou até mais, isso só depende do perfil do investidor.

Com isso se trabalho foi feito para chamar a atenção de pessoas que queiram investir em Fundos Imobiliários, mesmo que não domine o assunto, saibam o básico e entendem como fazer e fazer tudo isso com confiança.

3 Resultados e Discussão

3.1 Dividend Yield

O *Dividend Yield (DY)* é uma métrica que mede o retorno percentual dos dividendos pagos por um fundo em relação ao seu preço atual. Ele é calculado usando a fórmula:



$$DY = \frac{\text{Dividendo Anual}}{\text{Preço Atual}} \times 100$$

Essa métrica ajuda o investidor a avaliar se o fundo imobiliário está gerando um bom retorno passivo em relação ao valor pago por ele.

Exemplo 1: A Tabela apresenta o nome dos fundos imobiliários, o preço atual de cada um e o dividendo anual pago.

Tabela 1: Informações sobre os fundos imobiliários

Fundo Fictício	Preço Atual (R\$)	Dividendo Anual (R\$)
FII1	100,00	8,00
FII2	95,00	6,50
FII3	105,00	11,50

A partir da Tabela 1, escrevemos o código e geramos a Figura 1 dos três fundos imobiliários fictícios.

```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

# Dados de exemplo (em um caso real, os dados podem vir de uma fonte
online ou arquivo)
data = {
    "Fundo": ["FII1", "FII2", "FII3"],
    "Preco_Atual": [100.0, 95.0, 105.0],
    "Dividendo_Anual": [8.0, 6.5, 11.5]
}
df = pd.DataFrame(data)

# Cálculo do Dividend Yield
df["Dividend_Yield"] = (df["Dividendo_Anual"] / df["Preco_Atual"]) *
100

# Visualização do Dividend Yield
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.bar(df["Fundo"], df["Dividend_Yield"], color="skyblue")
plt.xlabel("Fundos Imobiliários")
plt.ylabel("Dividend Yield (%)")
plt.title("Dividend Yield dos Fundos Imobiliários")
plt.show()

# Exibição dos dados calculados
print(df)
```

Código 1: Código para gerar o gráfico dos Dividend Yields



A Figura 1 apresenta o gráfico com as informações dos fundos imobiliários e seus *dividend yield*.

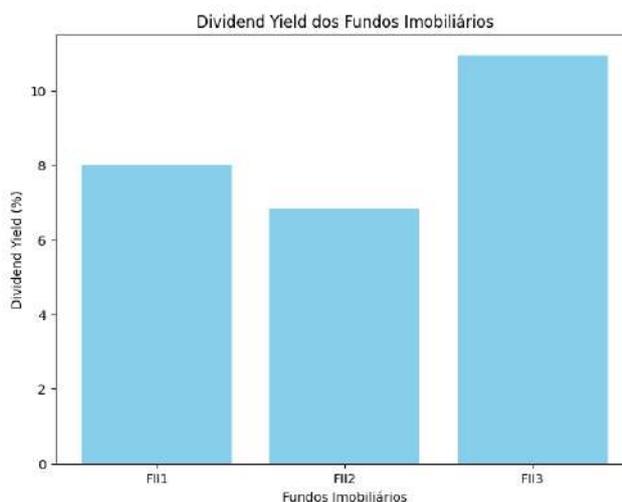


Figura 1: Dividend Yield de três fundos imobiliários

O gráfico mostra a comparação do DY entre os fundos, o que é importante para o investidor avaliar qual fundo está pagando mais dividendos em relação ao seu preço. Investidores focados em renda passiva priorizam fundos com DY elevado, pois isso indica um retorno maior em forma de dividendos.

3.2 Projeção de Preço de Ativos Usando Média Móvel

Outro cálculo matemático comum é a média móvel, usada para analisar a tendência de preço de um fundo ao longo do tempo. A média móvel suaviza as flutuações de preços e ajuda a identificar se o preço do ativo está em uma tendência de alta ou de baixa.

A média móvel é calculada pela média dos preços de um ativo em um determinado período. A fórmula para a média móvel simples (MMS) é:

$$MMS = \frac{\sum \text{Preços no período}}{\text{Número de dias do período}}$$

Exemplo 2: Neste exemplo, calculamos a média móvel de 7 dias sobre os preços diários de um fundo imobiliário. A linha da média móvel (em laranja) suaviza as flutuações diárias, facilitando a análise da tendência geral. Esse tipo de análise é essencial para investidores que desejam entender a direção dos preços e prever movimentos futuros com base no comportamento passado. A seguir é apresentado o Código 2 para gerar o gráfico em Python para gerar o gráfico.



```
import numpy as np

# Gerando dados fictícios de preços diários para um fundo
np.random.seed(0)
precos = np.random.normal(100, 5, 30) # Preços fictícios em 30 dias

# Calculando a Média Móvel de 7 dias
periodo = 7
mms = pd.Series(precos).rolling(window=periodo).mean()

# Visualização dos preços e da média móvel
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(precos, label="Preço Diário")
plt.plot(mms, label=f"Média Móvel de {periodo} Dias", color="orange")
plt.xlabel("Dias")
plt.ylabel("Preço")
plt.title("Projeção de Preço com Média Móvel")
plt.legend()
plt.show()
```

Código 2: Gerando as médias móveis

A Figura 2 apresenta a projeção de preço com média movel durante 30 dias, a linha azul indica o preço diário.

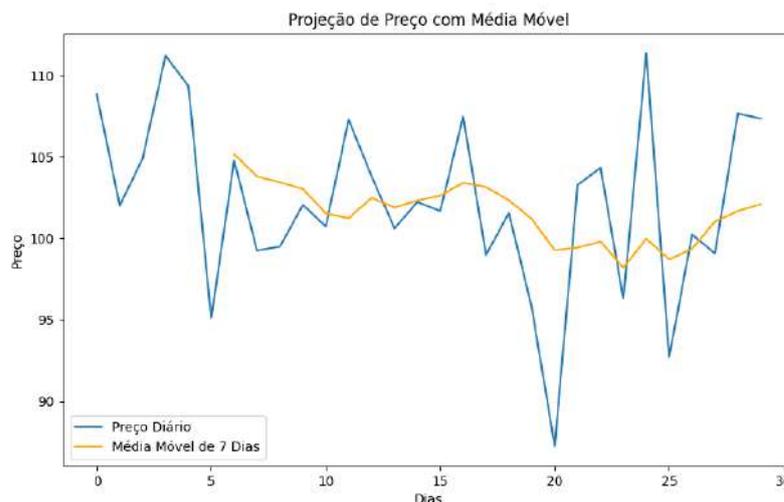


Figura 2: Projeção das médias móveis

Essas métricas matemáticas, como o *Dividend Yield* e a média móvel, são fundamentais no dia a dia do investidor, pois fornecem dados objetivos para avaliar o desempenho e o potencial dos fundos imobiliários. A análise matemática permite comparar ativos, avaliar rentabilidade e identificar tendências, contribuindo para decisões de investimento mais informadas e menos arriscadas.



4 Considerações finais

Analisando Fundos de Investimentos pela Linguagem de Programação Python, ressaltam-se a importância dos fundos imobiliários como uma opção acessível para investidores que desejam diversificar sua carteira com ativos tangíveis, como imóveis. A aplicação de Python no estudo desses fundos se mostrou valiosa ao simplificar a análise de dados financeiros complexos, como o cálculo do Dividend Yield e a projeção de preços por meio de médias móveis, permitindo aos investidores uma visão mais clara sobre o desempenho e a rentabilidade dos ativos.

Além disso, o estudo destaca como a matemática financeira aplicada a fundos imobiliários oferece métricas objetivas que facilitam a avaliação de retorno sobre o investimento, essencial para decisões de compra e venda de cotas. Indicadores como o Valor Presente Líquido (VPL) e a Taxa Interna de Retorno (TIR) foram utilizados para mensurar a viabilidade dos investimentos, proporcionando insights cruciais em um mercado dinâmico e sensível a mudanças econômicas.

A utilização de Python, com suas bibliotecas Pandas, NumPy e Matplotlib, revelou-se uma ferramenta poderosa para automatizar cálculos e gerar gráficos, tornando a análise dos fundos mais acessível para investidores que buscam um entendimento aprofundado sem depender exclusivamente de profissionais financeiros. O estudo ressalta que essa abordagem permite uma análise contínua e atualizada, especialmente útil em um cenário de investimentos imobiliários que envolve riscos e volatilidade.

Por fim, os autores sugerem que o investimento em fundos imobiliários pode ser um ponto de entrada viável para novos investidores, dado o custo relativamente baixo das cotas em comparação à compra direta de imóveis. Recomendam que iniciantes explorem esse tipo de investimento, analisando a rentabilidade e os riscos envolvidos, e aproveitem ferramentas tecnológicas como Python para monitorar e ajustar suas estratégias ao longo do tempo.

Referências

B3, B. B. B. **Fundos de Investimento Imobiliário (FII)**. 2024. <https://www.b3.com.br/pt_br/Produtos-e-servicos/negociacao/renda-variavel/fundos-de-investimento-imobiliario-fii.htm>. Acesso em: 28 ago. 2024.

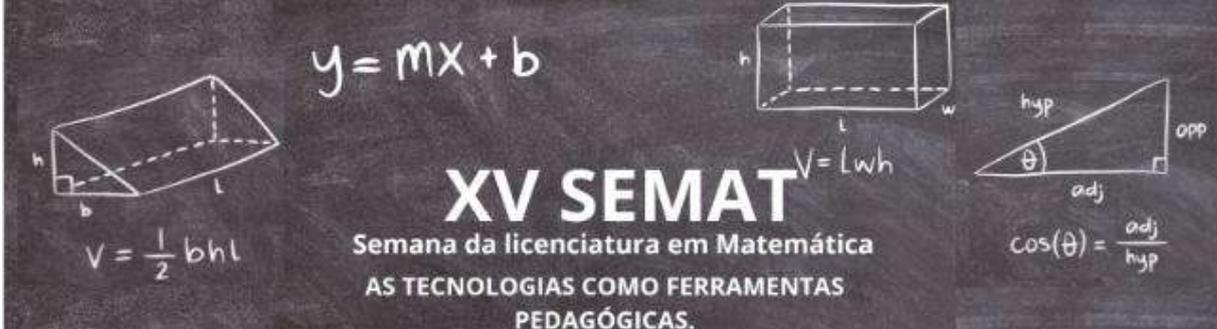
BARBOSA Filho, L. H. **Análise de Fundos Imobiliários com R e Python**. 2024. <<https://analismacro.com.br/data-science/dicas-de-rstats/analise-de-fundos-imobiliarios-com-r-e-python/>>. Acesso em: 28 Ago. 2024.



EXPLORER, F. **Plataforma de Dados sobre Fundos Imobiliários.** 2023. <<https://www.fundsexplorer.com.br/ranking>>. Acesso em: 20 ago. 2023.

AZEVEDO, L. L. de. **Análise do Mercado de Ações com Técnicas de Ciência de Dados.** 2024. Acesso em: 23 ago. 2024. Disponível em: <https://www.ufrn.br>.

MOBILIÁRIOS, C. de V. **Informações sobre Fundos de Investimento Imobiliário.** 2023. <<https://www.gov.br/cvm/pt-br>>. Acesso em: 20 ago. 2023.



ANÁLISE DA PRECIPITAÇÃO NAS CAPITAIS DO NORDESTE BRASILEIRO UTILIZANDO A TRANSFORMADA DE HILBERT-HUANG

Marluce Roberta Camargo Barbosa (Instituto Federal de Goiás - Câmpus Goiânia.
r.marluce@academico.ifg.edu.br)

Uender Barbosa de Souza (Instituto Federal de Goiás - Câmpus Goiânia.
uender.souza@ifg.edu.br)

Resumo

A variabilidade da precipitação é de suma importância para compreender a dinâmica climática, especialmente em regiões vulneráveis como o Nordeste do Brasil. Essa pesquisa investiga a variabilidade da precipitação nas capitais do nordeste brasileiro, utilizando a transformada de Hilbert-Huang (THH) para identificar padrões ocultos nas chuvas, dada a vulnerabilidade climática da região. A metodologia envolve a coleta de dados históricos de precipitação e a aplicação da THH para decompor e examinar esses dados, buscando uma compreensão mais profunda das variações pluviométricas, visando substituir a Transformada Wavelet pela THH, dada a natureza dos dados, proporcionando insights adicionais que podem contribuir para uma melhor gestão de recursos hídricos e planejamento urbano na região.

Palavras-chave: Precipitação. Nordeste do Brasil. Transformada de Hilbert-Huang. Variabilidade Climática.

1 Considerações Iniciais

A variabilidade da precipitação é um fator essencial que influencia a dinâmica climática de uma região, atuando como um dos principais componentes do ciclo hidrológico ao conectar a água da atmosfera com a água do solo, afetando diretamente o escoamento superficial e, conseqüentemente, a disponibilidade de recursos hídricos na região (Souza, 2015). Essa variabilidade climática tem implicações diretas no planejamento urbano e na gestão de recursos hídricos, tornando o estudo da precipitação fundamental para mitigar os impactos de eventos extremos, como secas severas e inundações. No Nordeste do Brasil, as chuvas estão concentradas principalmente nos meses de verão e outono, sendo fortemente



influenciadas por fatos como a Zona de Convergência Intertropical (ZCIT), Vórtices Ciclônicos de Altos Níveis (VCANs), Distúrbios Ondulatórios de Leste (DOLs) e ainda eventos de longa duração como El Niño-Southern Oscillation (ENSO), esses fatores desempenham um papel significativo, provocando oscilações anuais e interanuais nos padrões de precipitação (Souza, 2015). Diante disso, o regime de chuvas na região é marcado por sua não linearidade e não estacionaridade, características que tornam a análise climática ainda mais complexa.

Estudos anteriores utilizando a Transformada Wavelet (TW) já forneceram informações valiosas sobre a variabilidade da precipitação no Nordeste Brasileiro (Souza, 2015). Contudo, a metodologia empregada apresenta limitações na captura de comportamentos complexos e dinâmicos dos dados climáticos. Assim, a THH apresenta uma metodologia capaz de fornecer informações de frequência e amplitude, tornando-se muito útil para análise de fenômenos climáticos, que são frequentemente influenciados por uma multiplicidade de fatores como aqueles supramencionados (Huang et al., 1998). Dada a importância da precipitação para o clima local e a complexidade envolvida na sua análise, este projeto busca aplicar a THH para estudar as capitais do Nordeste do Brasil. Espera-se que essa abordagem forneça uma análise mais precisa da variabilidade climática, identificando comportamentos não evidentes de precipitação e contribuindo para a formulação de políticas públicas voltadas à mitigação dos impactos climáticos na região.

2 Desenvolvimento

A primeira fase do trabalho consiste na coleta de dados climáticos históricos de precipitação das capitais do Nordeste Brasileiro. Esses dados serão obtidos de bases como o Instituto Nacional de Meteorologia (INMET) e o Centro de previsão do Tempo e Estudos Climáticos (CPTEC) por meio de solicitação. Os dados coletados englobam séries temporais de precipitação diária e mensal, abrangendo o período de 1961 a 2010 para garantir uma análise robusta e consistente. Após a coleta, os dados passarão por um processo de limpeza e organização, onde serão eliminados dados faltantes ou incoerentes, e serão tratados outliers que possam interferir na análise, conforme procedimentos adotados nos estudos de Souza (2015).

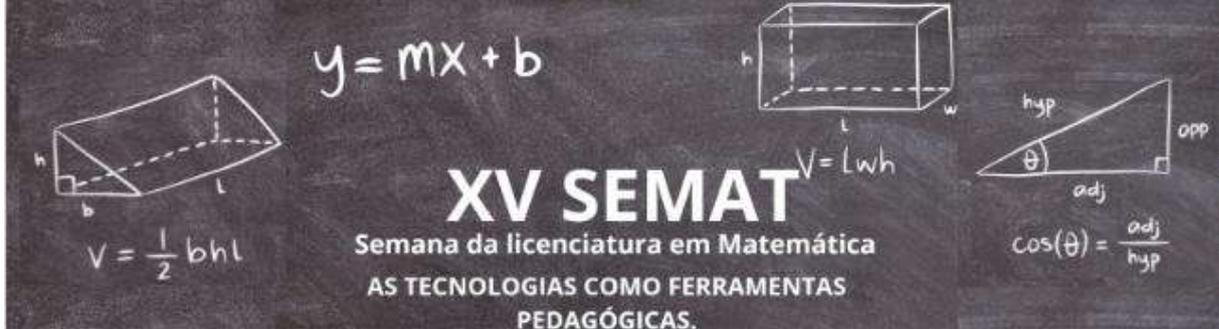


Com os dados preparados, será aplicada a Decomposição em Modos empíricos (DME). Essa decompõe a série temporal de precipitação em diferentes Funções de Modo Intrínseco (IMFs), cada uma representando uma componente oscilatória com características específicas de frequência e amplitude. Essa decomposição permite a identificação de diferentes escalas temporais presentes nos dados, desde ciclos sazonais até oscilações de longo prazo. A DME tem a vantagem de ser adaptativa e local, ajustando-se diretamente aos dados sem impor uma base pré definida, o que a diferencia de técnicas tradicionais como a Transformada de Fourier e Transformada Wavelet (Souza; Escola e Brito, 2022).

Após a decomposição, será aplicada a Transformada de Hilbert-Huang em cada IMF, permitindo calcular as frequências e amplitudes instantâneas ao longo do tempo. Essa fase da análise oferece uma visão detalhada das oscilações temporais da precipitação, possibilitando a identificação de variações não visíveis nos padrões de precipitação, bem como de eventos climáticos extremos, como secas e enchentes, com maior precisão. A THH fornece uma representação analítica que associa as variações locais de frequência e amplitude com fenômenos atmosféricos e oceânicos que influenciam o clima no Nordeste.

Os resultados obtidos pela THH serão comparados com o estudo realizado por Lígia Gabriela Rodrigues de Souza em 2015 como dissertação de mestrado apresentada ao programa de Pós-Graduação em ciências climáticas, do centro de ciências exatas e da Terra da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (Souza, 2015), que utilizou a Transformada Wavelet (TW) para analisar a precipitação no Nordeste. A comparação entre os métodos permitirá avaliar a eficácia da THH e validar seu uso como uma ferramenta mais adaptativa para análise climática.

A THH tem uma vantagem por sua capacidade de analisar dados não estacionários e não lineares, oferecendo uma visão mais precisa das diferentes escalas temporais e de fenômenos climáticos complexos, tal como demonstrado no estudo realizado por Carmona e Poveda na Universidade Nacional da Colômbia. Espera-se que a aplicação da Transformada de Hilbert-Huang revele tendências latentes e mais detalhadas da variabilidade temporal e espacial da precipitação nas capitais do Nordeste brasileiro, que não foram captadas em estudos anteriores. Baseando-se no que foi observado em séries temporais hidroclimáticas no estudo mencionado, é esperado que a DME identifique diferentes modos de oscilação nas séries de precipitação, associando-os a frequências que variam desde ciclos anuais sazonais



até oscilações multidecenais.

Foi observado um padrão de chuva no estudo realizado com a TW “Maceió, Salvador e Aracajú são cidades com padrões de chuva semelhantes, assim como, João Pessoa, Natal e Recife, formando outro grupo e um terceiro grupo constituído por Fortaleza, Teresina e São Luís, com características semelhantes” (Souza, 2015). Já a THH foi capaz de identificar modos oscilatórios relacionados a fenômenos climáticos globais como o ENSO (Carmona, 2011). No contexto do Nordeste brasileiro, é provável que a THH também identifique padrões similares, especialmente relacionados à ZCIT, que é um dos principais fatores meteorológicos responsáveis pelas chuvas na região.

Além disso, espera-se que a THH seja capaz de localizar temporalmente os modos de oscilação. A THH identificou claramente períodos com maior energia nos modos de oscilação, correspondentes a eventos climáticos significativos como El Niño e La Niña (Carmona, 2011). Aplicando essa metodologia ao Nordeste brasileiro, espera-se localizar os momentos de maior variabilidade de precipitação, tanto em ciclos sazonais quanto em períodos de longo prazo. Isso pode fornecer valiosas informações para a previsão climática e para o planejamento de recursos hídricos, permitindo uma resposta mais eficiente a eventos de seca ou de chuvas excessivas.

A THH também é esperada para fornecer uma análise mais detalhada da precipitação ao lidar com dados atípicos (outliers), como eventos de precipitação extrema. Estudos anteriores utilizando a TW frequentemente apresentaram dificuldades em lidar com a natureza não estacionária e a presença de outliers nos dados de precipitação. No entanto, a THH, ao adaptar-se diretamente ao comportamento dos dados, permite que essas variações extremas sejam localizadas e analisadas no tempo, sem distorções.

Além disso, a comparação com os estudos anteriores que utilizaram a TW será uma parte essencial deste projeto. Espera-se que a THH apresente uma superioridade significativa na detecção de sinais variáveis e de comportamento não linear, oferecendo uma compreensão mais clara das interações entre diferentes escalas temporais. A aplicação da TW já forneceu informações importantes sobre padrões sazonais e regionais de precipitação nas capitais do Nordeste, mas a THH deve identificar essas oscilações com maior precisão e detalhamento, além de revelar padrões de longa duração que não foram devidamente capturados anteriormente.



3 Considerações Finais

Este estudo destaca a relevância da Transformada de Hilbert-Huang como uma ferramenta avançada para a análise da variabilidade da precipitação nas capitais do Nordeste brasileiro. Ao lidar com dados com características instáveis e relações não proporcionais, a THH tem o potencial de fornecer uma análise mais precisa e adaptativa em comparação com métodos tradicionais, como a TW. A aplicação da DME e da THH deverá permitir a detecção robusta de eventos climáticos extremos e a análise de fenômenos sazonais e interanuais. Essa abordagem, ao revelar padrões que podem não ser capturados por técnicas tradicionais, poderá ampliar o entendimento sobre a variabilidade da precipitação em uma das regiões mais suscetíveis a secas e inundações no Brasil.

Dessa forma, os resultados esperados deste trabalho têm o potencial de contribuir significativamente para o avanço do conhecimento científico sobre a variabilidade climática no Nordeste brasileiro. A análise detalhada fornecida pela THH poderá subsidiar políticas públicas mais precisas, voltadas à gestão sustentável de recursos hídricos e à mitigação de riscos climáticos. Além disso, este estudo poderá servir como base sólida para futuras pesquisas que buscam aprofundar o uso de metodologia adaptativas na análise de dados climáticos complexos.

4 Agradecimentos

Os autores agradecem ao Instituto Federal de Goiás pelo suporte e oportunidade de desenvolvimento desta pesquisa no formato de Iniciação Científica através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC).

5 Referências

CARMONA, A.; POVEDA, G. **Identificación de Modos Principales de Variabilidad Hidroclimática en Colombia Mediante la Transformada de Hilbert-Huang**. In: 9º Congreso Colombiano de Meteorología, 2011, Bogotá. Anais [...]. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2011. p. 23-25, maio 2011.

CENTRO DE PREVISÃO DE TEMPO E ESTUDOS CLIMÁTICOS (CPTEC/INPE). **Banco de dados meteorológicos**. Disponível em: <http://www.cptec.inpe.br>. Acesso em: 10 jul. 2024.

HUANG, Norden E. et al. **The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum**



for nonlinear and non-stationary time series analysis. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: mathematical, physical and engineering sciences, v. 454, n. 1971, p. 903-995, 1998.

INSTITUTO NACIONAL DE METEOROLOGIA (INMET). **Dados meteorológicos.** Disponível em:<http://www.inmet.gov.br>. Acesso em: 10 jul. 2024.

SOUZA, Lidia Gabriela Rodrigues de. **Estudo da variabilidade da precipitação das capitais do nordeste do Brasil por meio de transformada wavelet.** 2015. 129 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Climáticas) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2015.

SOUZA, Uender Barbosa de; ESCOLA, João Paulo Lemos; BRITO, Leonardo da Cunha. **A survey on Hilbert-Huang transform: Evolution, challenges and solutions.** Digital Signal Processing, v. 120, p. 103292, 2022.

Parte IV

Minicursos



PROPOSTA DE OFICINA/MINICURSO

1. Título da oficina/minicurso: Semigrupos de Operadores Lineares e suas Aplicações em Equações Diferenciais Parciais

2. Eixo Temática do evento ao qual a oficina/minicurso se vincula:

3. Nome completo dos ministrantes: Dr. Marcos Roberto Batista

4. Número de vagas: 20

5. Apresentação da proposta de oficina/minicurso

5.1. Resumo:

O minicurso proposto tem como objetivo apresentar os fundamentos da teoria de semigrupos de operadores lineares, enfatizando suas aplicações na análise de equações diferenciais parciais. Através desta abordagem, busca-se capacitar estudantes, pesquisadores e profissionais interessados em aprofundar seus conhecimentos em métodos avançados para a solução de equações diferenciais.

5.2. Justificativa:

A resolução de equações diferenciais é um campo central na matemática aplicada, com implicações impactantes na física, engenharia e outras áreas das ciências exatas. Desde os primórdios do cálculo diferencial, matemáticos como Bernoulli, Cauchy, Euler e Lagrange fizeram contribuições de suma importância para o desenvolvimento de ferramentas analíticas para abordar problemas envolvendo equações diferenciais.

Apesar de muitos avanços nesse sentido, ainda existem classes significativas de equações que, devido à sua complexidade, somente podem ser resolvidas por meio de métodos numéricos. Todavia, a fundamentação teórica acerca da existência e unicidade de soluções é indispensável para garantir a validade dos resultados numéricos.

Neste contexto, a teoria de Geradores de Semigrupos, introduzida por E. Hille e K. Yoshida em 1940, oferece uma poderosa estrutura matemática para a análise de equações diferenciais parciais, especialmente na formulação e interpretação de soluções.

Essa teoria não apenas sustenta as bases para a compreensão do comportamento das soluções, mas também é amplamente aplicada em áreas como mecânica dos fluidos, física de partículas e modelagem de sistemas dinâmicos.

O minicurso visa apresentar a teoria de semigrupos de operadores lineares e suas aplicações em equações diferenciais parciais, capacitando os participantes em métodos avançados de solução.



5.3. Conteúdos:

- Histórico da teoria das equações diferenciais e importância dos semigrupos
- Definição e propriedades de semigrupos de classe C^0
- Exemplos de semigrupos no contexto das equações diferenciais parciais
- Teorema de Hille-Yosida e aplicações

5.4. Objetivos:

- Apresentar os conceitos básicos e as propriedades dos semigrupos de operadores lineares, com ênfase nos semigrupos de classe C^0
- Introduzir o Teorema de Hille-Yosida e sua relevância para identificar geradores de semigrupos
- Desenvolver habilidades para aplicar a teoria de semigrupos na solução de problemas práticos em matemática, física e engenharia.

5.5. Metodologia: O minicurso será desenvolvido de forma expositiva e interativa, articulando explicações teóricas, exemplos práticos e atividades participativas, com o objetivo de facilitar a aprendizagem dos conceitos e provocar o aprendizado ativo.

5.6. Recursos necessários (sala, equipamentos, materiais papelaria, dentre outros):

Quadro branco, pincéis coloridos e datashow.

5.7. Outras informações relevantes:

5.8. Referências Bibliográficas:

BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: Springer, 2011.

IORIO, R; NUNES, W. **Introdução às Equações de Evolução não Lineares**. Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. New York: Springer, 1983.

Goiânia, 18 de dezembro de 2024

Marcos Roberto Batista

Nome completo e assinatura do primeiro proponente



PROPOSTA DE OFICINA/MINICURSO (Escolha uma modalidade)
(Toda essa proposta deve estar descrita em um número máximo de 3 páginas)

1. Título da oficina/minicurso: Computação algébrica para licenciatura com o Software Maxima

2. Eixo Temática do evento ao qual a oficina/minicurso se vincula:

Fundamentos, metodologias e recursos para o Ensino de Matemática.

3. Nome completo dos ministrantes incluindo titulação máxima ou identificando se é aluno de graduação, vínculo institucional e e-mail (O proponente principal deve ser um professor vinculado a alguma instituição de ensino. O número máximo de autores é 5 para ambas as modalidades)

4. Número de vagas: 30

5. Apresentação da proposta de oficina/minicurso

5.1. Resumo: Até 100 palavras apresentando resumidamente a proposta

5.2. Justificativa:

Maxima é uma poderosa ferramenta de cálculo simbólico, que facilita a resolução de equações e a simplificação de expressões, auxiliando o aprendizado dos alunos. Seu uso desenvolve o raciocínio analítico, integra-se com diversas disciplinas, como física e engenharia, e permite maior autonomia e eficiência na resolução de problemas complexos. Para os educadores, o software Maxima enriquece o ensino, proporcionando atividades práticas e visualizações que tornam o aprendizado mais dinâmico e interativo.

Vale mencionar também que o software Maxima é gratuito e de código aberto podendo ser instalado nos principais sistemas operacionais.

5.3. Conteúdos:

1. Introdução ao Maxima e ao wxMaxima

1.1 O que é o Maxima: histórico e conceito como ferramenta de álgebra computacional.

1.2 Comparação com outras ferramentas similares.

1.3 Introdução ao wxMaxima: características principais e vantagens.

2. Instalação e Configuração

2.1 Como instalar o Maxima e wxMaxima em diferentes sistemas operacionais (Windows, Linux, macOS).



2.2 Configurações básicas pós-instalação.

3. Explorando o wxMaxima

3.1 Tour guiado pela interface gráfica: menus e barras de ferramentas.

3.2 Navegação básica e localização de funcionalidades principais.

4. Comandos Básicos e Operações Matemáticas

4.1 Realização de cálculos simples (operações básicas e potências).

4.2 Inserção e manipulação de expressões matemáticas.

4.3 Exemplos práticos:

- Resolução de equações simples.
 - Cálculo de integrais e derivadas básicas.
-

5. Funções Matemáticas no Maxima

5.1 Definição e manipulação de funções.

5.2 Avaliação de funções em pontos específicos.

6. Visualização Gráfica

6.1 Criação de gráficos 2D e 3D.

6.2 Personalização de gráficos: cores, estilos de linha e rótulos.

6.3 Exemplos práticos de visualização de funções e equações.

7. Problemas Matemáticos Avançados

7.1 Resolução de sistemas de equações lineares.

7.2 Aplicações em cálculo diferencial e integral.

7.3 Exemplos aplicados em contextos reais.

8. Automação e Rotinas Personalizadas

8.1 Introdução à criação de scripts simples no Maxima.

8.2 Uso de loops e condicionais para automatizar cálculos recorrentes.

8.3 Exemplos práticos de rotinas personalizadas.

9. Exercícios Práticos e Colaborativos⁸⁰

9.1 Exercícios guiados para reforçar os conceitos aprendidos.



9.2 Resolução conjunta de problemas sugeridos pelos alunos.

9.3 Espaço para dúvidas e discussões colaborativas.

10. Exportação e Documentação

10.1 Como exportar gráficos e resultados de cálculos.

10.2 Criação de relatórios organizados no Maxima.

11. Recursos Adicionais

11.1 Sugestões de materiais de estudo: tutoriais, fóruns e documentação oficial.

11.2 Direcionamento para explorar conceitos mais avançados após o curso.

5.4. Objetivos:

Nesse minicurso temos os seguintes objetivos:

- Apresentar aos alunos como obter o software Maxima e ajudar os alunos a instalá-lo nos seus computadores;
- Apresentar a interface wxMaxima.
- Resolver alguns exercícios de matemática básica usando o software Maxima.

5.5. Metodologia:

As atividades serão realizadas visando cobrir as seguintes etapas:

- Explicação sobre o que é o Maxima, sua história e como ele se posiciona como uma ferramenta de álgebra computacional.
- Introdução ao wxMaxima, destacando suas vantagens em relação a outras interfaces (foco na simplicidade e usabilidade).
- Demonstração de como instalar o software no computador (para diferentes sistemas operacionais) e a configuração básica.
- Tour guiado pela interface gráfica do wxMaxima, com foco em como navegar pelos menus e acessar as funcionalidades principais.
- Mostra dos menus principais e barras de ferramentas, explicando como encontrar rapidamente as funções mais comuns.
- Explicação passo a passo dos comandos básicos do Maxima, como realizar cálculos simples (adição, subtração, multiplicação, divisão, potências) e como inserir expressões matemáticas.
- Uso de exemplos práticos para cada comando básico, como resolver equações simples e calcular integrais ou derivadas.

5.6. Recursos necessários (sala, equipamentos, materiais papelaria, dentre outros): O laboratório de ensino de Matemática e os laboratórios de informática têm capacidade para 30 pessoas, assim como as salas de aulas. Os demais materiais necessários são de responsabilidade do proponente.



5.7. Outras informações relevantes:

5.8. Referências Bibliográficas:

- MAXIMA. **Maxima Official Documentation.** Disponível em: <http://maxima.sourceforge.io/documentation.html>. Acesso em: 29 set. 2024.
- DODIER, Robert. **Maxima by Example.** Disponível em: <https://github.com/robert-dodier/maxima-by-example>. Acesso em: 29 set. 2024.
- VAN DEN BERGH, Michel. **Maxima Manual.** Disponível em: <http://www.math.uni-sb.de/ag/angewandte.math/download/maxima.pdf>. Acesso em: 29 set. 2024.
- PAFSOMOV, A. **Introduction to Maxima for Calculus.** Disponível em: http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/pafsomov/Maxima_manual.pdf. Acesso em: 29 set. 2024.
- MAXIMA. **Maxima – Wikibooks.** Disponível em: <https://en.wikibooks.org/wiki/Maxima>. Acesso em: 29 set. 2024.



Goiânia, 27 de Novembro de 2024

Nome completo e assinatura do primeiro proponente



PROPOSTA DE OFICINA/MINICURSO (Escolha uma modalidade)
(Toda essa proposta deve estar descrita em um número máximo de 3 páginas)

1. Título da oficina/minicurso: Introdução à Robótica Educacional com Arduino: Possibilidades para o Ensino de Matemática e Ciências da Natureza.

2. Eixo Temática do evento ao qual a oficina/minicurso se vincula: Tecnologias como ferramentas pedagógicas.

3. Nome completo dos ministrantes

Gustavo da Silva Mocó, doutor, SEDUC GO, gustavomoco@yahoo.com.br.

Número de vagas: 30

4. Apresentação da proposta de oficina/minicurso

4.1. Resumo: O minicurso introdução à robótica educacional, explora como a robótica, utilizando a plataforma Arduino, poderá ser uma ferramenta poderosa para ensinar conceitos de matemática e ciências da natureza. Os participantes terão noções básicas de programação e eletrônica para construir dispositivos simples que aplicam conceitos matemáticos e científicos de forma prática e interativa.

4.2. Justificativa: A necessidade de inovação no que se refere as novas práticas pedagógicas possui relevância no contexto atual, pois os discentes estão vivenciando um momento em que a tecnologia está presente em diversas situações dos seus cotidianos. A utilização de ferramentas pedagógicas tecnológicas se tornou uma necessidade para os professores atuais e a robótica educacional é uma dessas ferramentas que o professor precisa conhecer.

4.3. Conteúdos: Eletrônica básica do arduino, noções de programação e sugestões de projetos.

4.4. Objetivos: Possibilitar que os participantes tenham acesso ao uso do arduino como ferramenta tecnológica e pedagógica.

4.5. Metodologia: apresentação dialogada com utilização do arduino e demonstração de possíveis projetos.

4.6. Recursos necessários (sala, equipamentos, materiais papelaria, dentre outros): Laboratório de informática, projetor e computador.

4.7. Outras informações relevantes:



4.8. Referências Bibliográficas:

Fetzner, G. Experimentos de baixo custo para o ensino de Física em Nível Médio usando a placa Arduino-UNO. 2015. 207 f.

Monk, S. (2014). 30 Projetos com Arduino (2 ed.). Porto Alegre: Bookman.

Goiânia, 18 de novembro de 2024

Gustavo da Silva Mocó