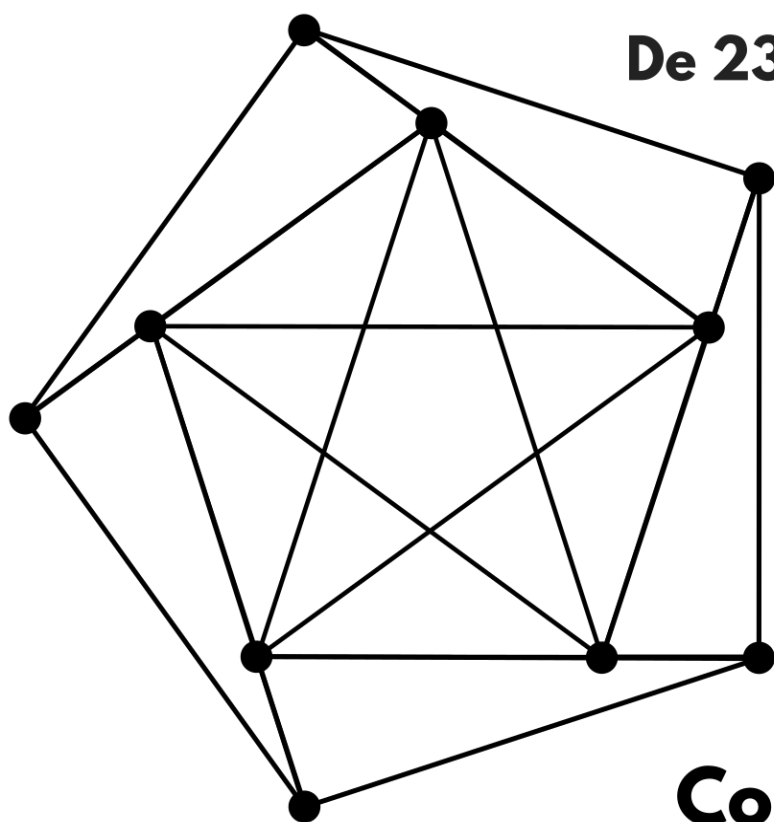


10ª SEMANA DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

1º Encontro de Egressos da Matemática

De 23 a 26 de abril de 2019



Oficinas
Palestras
Minicursos
Mesa-redonda
Comunicações orais

eventos.ifg.edu.br/eventosmatematica

smat.goiania@ifg.edu.br

ANAIIS



**INSTITUTO
FEDERAL**

Goiás

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Pró-Reitoria de Ensino
Coordenação da Área Acadêmica de Matemática
Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática

**ANAIS – 10^a Semana da Licenciatura em Matemática do
IFG/Campus Goiânia**

Goiânia, Abril 2019

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Pró-Reitoria de Ensino
Coordenação da Área Acadêmica de Matemática
Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática

Comissão Organizadora

Hugo Leonardo da Silva Belisário
João Lopes Cardoso Filho
José Eder Salvador de Vasconcelos
Karoline Victor Fernandes
Maxwell Gonçalves Araújo
Wesley Pinheiro Barreto

Comitê Científico

Ana Cristina Gomes de Jesus
Hugo Leonardo da Silva Belisário
Iran Martins do Carmo
João Lopes Cardoso Filho
José Eder Salvador de Vasconcelos
Karoline Victor Fernandes
Márcio Dias de Lima
Maxwell Gonçalves Araújo
Reinier Díaz Millán
Simone Ariomar de Souza
Wesley Pinheiro Barreto

10 ^a Semana da Licenciatura em Matemática	
Realização:	Coordenação da Área Acadêmica de Matemática Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática Coordenação do Curso de Especialização em Matemática
Apoio:	Direção Geral do Câmpus Goiânia Departamento de Áreas Acadêmicas II Coordenação de Comunicação Social do Câmpus Goiânia Coordenação de Eventos do Câmpus Goiânia
Período:	de 23 a 26 de abril de 2019
Site:	www.eventos.ifg.edu.br/eventosmatematica

Goiânia, Abril 2019

Sumário

1 SOBRE O EVENTO	6
O Movimento Lógico-Histórico como Recurso Metodológico Para o Ensino de Matemática o Caso dos Sistemas Lineares	6
Estudo de Triângulos e Quadriláteros: Uma Abordagem Experimental em Sala de Aula	12
Utilizando o Material Dourado Como Uma Alternativa de Ensino Aprendizado de Equação de Segundo Grau	13
O Uso do Pacote gcc Como Ferramenta Auxiliar em Estudos Relacionados ao Controle Estatístico de Qualidade	17
Programação com Dev-C++ nas aulas de Matemática	20
Probabilidade Geométrica e Aplicações	24
A Magia Por Trás da Matemática Financeira	29
O Lema de Lax - Milgram e Suas Aplicações em Equações Diferenciais Parciais	30
O Outro Lado da Matemática	31
Potenciação Matemática	36
Produção de Relatórios Estatísticos com R Markdown	38
Por Onde Andam os Egressos da Licenciatura em Matemática do IFG - Goiânia e Quantos Exercem a Profissão de Professor?	40
A Trajetória Formativa de Um Estudante da Escola Municipal Miguel Augusto de Faria: O Perfil dos Egressos dos Ex?Alunos da Turma de 2008?2011	43
Explorando a Matemática Financeira no Nível Médio	48
Desafiando a Álgebra Superior no Nível Médio: As Equações Diofantinas Lineares e Suas Aplicações	50
Alguns Resultados Sobre as Publicações Relacionadas ao LEM no Banco de Dissertações e Teses da Capes nos Anos de 2012 a 2016	52
Conjuntos Infinitos Enumeráveis e Não Enumeráveis, Quantização da Energia e as Relações Entre o Discreto e o Contínuo no Espectro Eletromagnético da Luz	55
Modelo de Combustão em Meios Porosos Com n Camadas	59
Teoria dos Números, Números Primos e Números Irracionais	61
Estudo da Relação das Formas Algébricas e Geométricas das Superfícies Quádricas com Auxílio Computacional	63

Equações Diferenciais: Uma Modelagem Matemática Aplicada em Circuitos Elétricos nas Engenharias	68
GeoGebra a Favor da Geometria Analítica: Secções Cônicas	73
Conjunto de Cantor	78
O Uso do Algoritmo de Colônia de Abelhas Para Monitoramento Estrutural de um Sistema Hidráulico	80

1

SOBRE O EVENTO

A Semana da Licenciatura em Matemática do do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás - Campus Goiânia é promovida anualmente desde 2010. A Semana, organizada pela Coordenação da Área Acadêmica de Matemática do IFG - Câmpus Goiânia, destinada aos alunos do curso de licenciatura em matemática e demais cursos atendidos pela coordenação de matemática do IFG, objetiva difundir/divulgar o conhecimento matemático produzido em âmbito regional à comunidade acadêmica do IFG - Câmpus Goiânia, congregar alunos e professores, estimular os alunos a participar de eventos científicos e divulgar os trabalhos realizados no âmbito do curso, além de reunir a comunidade acadêmica para promover o intercâmbio entre as áreas afins à Matemática, interagir conhecimentos e mostrar a importância das parcerias entre pesquisadores/instituições na formação do professor de matemática.

A realização deste evento contribui com a formação científica, tecnológica, inovadora e educacional dos participantes, de modo a incentivar a comunidade à criatividade e à inovação na produção de conhecimentos e na importância da participação nos eventos científicos.

A semana de Matemática conta ano a ano com a participação de renomados professores e pesquisadores da área de matemática, não só da região centro-oeste, mas também de todo o país. Também são promovidas seções técnicas em que os alunos dos cursos de Matemática (graduação e pós-graduação) e áreas afins da região têm a oportunidade de expor seus trabalhos, sejam de iniciação científica, trabalho de conclusão de curso, monografia de especialização, etc.

Neste ano, de 2019, estamos realizando a 10^a edição da semana. Juntamente com ela, realizamos o 1^o encontro de egressos dos cursos da Matemática, licenciatura e especialização, do IFG - Campus Goiânia. 1^o Encontro de Egressos visa reunir os egressos dos cursos da matemática a fim de trocarmos experiências sobre a atuação dos mesmos no mercado de trabalho, aferir a partir dos seus relatos a eficácia do trabalho desenvolvido pela equipe da Matemática, oportunizar aos ex-alunos contato com o ambiente acadêmico estimulando a formação continuada do mesmo.

Serão proferidas palestras, oficinas, minicursos nas áreas de matemática e educação matemática, contribuindo para aperfeiçoar a formação dos discentes do curso de licenciatura em matemática e para aguçar a curiosidade e interesse dos demais estudantes do câmpus por esta área.

Nesta edição pretendemos recuperar a história do evento e abrir espaço para que os ex-alunos relatem suas experiências pós-curso.

O movimento lógico-histórico como recurso metodológico para o ensino de Matemática: o caso dos sistemas lineares

Assis, Aline Mota de Mesquita
Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia, IFG
amm.aline@gmail.com

24 de Março de 2019

1 Introdução

Na atividade de ensino, o lógico-histórico tem como principal função auxiliar o pensamento, tanto daquele que ensina quanto daquele que aprende, a movimentar-se no sentido de encontrar as verdades que são relativas, porque são definidas e redefinidas, continuamente, a partir de definibilidades próprias de cada conceito.

Quando se fala em inserir a história do objeto no processo de ensino-aprendizagem dele, não se trata da sua história puramente factual com o intuito de apenas saber o que se passou até chegar à constituição de determinado objeto, como uma simples acumulação de fatos históricos, mas como uma fonte de diálogo que possibilite ligar o presente ao passado, constituindo uma história segundo o olhar daquele que a faz, incorporando novas fontes e vozes a esse diálogo e tornando conexo o que antes parecia desconexo e incomensurável. Destaca-se, nesse sentido, a contribuição de autores como Kopnin (1978), Vygotski (1991) e Davydov (1988), que buscam compreender o conceito como desdobramento da história, tendo em vista captar elementos que permitam apreender as formas de pensamento, de linguagem e o sistema de conexões que geram o conceito, a saber, a sua essência. Esses autores afirmam que o lógico, isto é, a essência de determinado conhecimento se constitui na história e exige o conhecimento da história desse objeto.

Assim, conhecer a história de um objeto é compreender a atividade prática que conduziu o homem à constituição do conceito, como afirma Kopnin (1978, p. 208-209, grifos do autor):

Os conceitos da ciência surgem da necessidade da atividade prática dos homens; a limitação da prática histórico-social determina a limitação dos nossos conceitos sobre o mundo exterior [...] Mas nem todos os conceitos da ciência são gerados imediatamente pelas necessidades da atividade produtiva do homem. Muitos deles, os matemáticos, por exemplo, surgem para satisfazer às necessidades do desenvolvimento de outras ciências (mecânica, física, etc.); alguns são gerados pelas necessidades internas da própria ciência como meio do sucessivo desenvolvimento desta. Em suma, porém, todo o sistema de conceitos dessa ou daquela ciência é gerado pela prática multiforme do homem.

Diante disso, neste texto busca-se apresentar o movimento lógico-histórico do conceito de sistema linear, culminando com o seu nuclear e as conexões conceituais constituídas durante o seu desenvolvimento histórico. Obviamente, não será apresentado todas as conexões possíveis a este conceito, mas aquelas que são inerentes a esta pesquisa segundo o olhar da autora.

2 O movimento lógico-histórico e a ação do professor

Kopnin (1978, p. 183-184, grifos do autor) escreve:

Por histórico subentende-se o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento. O histórico atua como objeto do pensamento, o reflexo do histórico, como conteúdo. [...] O lógico é o meio através do qual o pensamento realiza essa tarefa, mas é o reflexo do histórico em forma teórica, vale dizer, é a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema de abstrações.

Kopnin (1978) e Davydov (1988) defendem que só é possível compreender bem um objeto quando se descobre sua essência que está diretamente ligada ao seu desenvolvimento histórico, sendo sua teoria também a sua história.

Para que o caminho didático formulado por Davydov (1988) possa ser implementado, o autor recomenda que antes de proceder à organização do plano de ensino, o professor deve, de acordo com a área de conhecimento e com a especificidade do conteúdo, realizar a análise lógica e histórica do

conteúdo a fim de identificar as relações nele presentes, o movimento mental que ele contém e a lógica científica que o governa.

Em síntese, para que o aluno consiga pensar teoricamente é preciso que o professor “analise sua origem [do conceito] e desenvolvimento no campo científico que integra, identifique as relações nele presentes, o tipo de movimento mental que ele contém e a lógica científica que governa” (FREITAS, 2011, p. 83). Somente a partir disso ele poderá planejar ações necessárias ao aluno para que ele possa se apropriar “[...] dos procedimentos lógicos e investigativos com os quais os pesquisadores trabalham ao formular o conhecimento do objeto” (FREITAS, 2011, p. 73).

3 Movimento lógico-histórico do conceito de sistema linear

Por volta do ano 200 a.C., os chineses resolviam sistemas de ordem dois e três e foram os precursores do método de eliminação de Gauss utilizado para resolver sistemas lineares, o qual só se tornaria conhecido no século XIX. Exemplos sobre o método utilizado pelos chineses podem ser encontrados nos *Nove capítulos sobre a arte da matemática*. Como exemplo de um desses problemas, Eves (2011) traz o Problema 1 do Capítulo VIII:

Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma de qualidade regular e um feixe de uma de má qualidade são vendidos por 39 dou. Dois feixes de boa, três de regular e um de má são vendidos por 34 dou. Um feixe de boa, dois de regular e três de má são vendidos por 26 dou. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades? (EVES, 2011, p. 268)

Este problema resulta em um sistema de equações lineares com três equações e três incógnitas, cujo método de resolução utilizado pelos chineses se assemelha ao método de eliminação de Gauss (O’CONNOR; ROBERTSON, 2016).

Segundo alguns historiadores matemáticos, o estudo moderno de sistemas de equações lineares pode ter se originado com o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) em 1693 quando este criou, na Europa, a noção de determinante justamente para resolver sistemas lineares (KLEINER, 2007). Entretanto, dez anos antes, em 1683, o japonês Takakazu Seki Kowa (1642 – 1708) já havia calculado determinantes de matrizes de ordens dois, três, quatro

e cinco (escritas em forma de tabelas como os chineses faziam), mas ele os usava para resolver equações e não sistemas (EVES, 2011).

Leibniz foi engajado em causas religiosas (um reflexo da reforma protestante) e filosóficas e, por ter sido um diplomata, viajava muito, tudo isso o fez conhecer vários estudiosos por toda Europa e o levou a trocar correspondências com a maioria deles, sejam eles matemáticos ou não. Em uma de suas correspondências ao matemático francês Guillaume de l'Hôpital (1661 – 1704), datada justamente do ano de 1693, Leibniz diz que ocasionalmente ele utilizava números para indicar linhas e colunas em um sistema de equações, escrevendo na forma

$$\begin{cases} 10 + 11x + 12y = 0 \\ 20 + 21x + 22y = 0 \\ 30 + 31x + 32y = 0 \end{cases}$$

e que, se este sistema tinha solução, então

$$10 \cdot 21 \cdot 32 + 11 \cdot 22 \cdot 30 + 12 \cdot 20 \cdot 31 = 10 \cdot 22 \cdot 31 + 11 \cdot 20 \cdot 32 + 12 \cdot 21 \cdot 30.$$

Na linguagem moderna, o número 12 no sistema representa a linha 1 e a coluna 2 ou, em símbolos, a_{12} e a igualdade acima nos diz que se um sistema tem solução, então seu determinante é nulo. Esta é a primeira aparição do conceito de determinante na Europa (O'CONNOR; ROBERTSON, 2016).

Note que o conceito de determinante não nasceu ligado ao conceito de matriz quadrada como temos hoje nos livros didáticos, isso veio posteriormente com a evolução da teoria de matrizes. Este fato mostra que nem todo conteúdo matemático, como descrito nos livros didáticos atuais, obedece ao mesmo desenvolvimento histórico de sua criação e também que os conceitos

[...] estão em indissolúvel inter-relação; a diferença entre conceitos isolados é relativa, sob determinadas condições um conceito se converte em outro, mas mesmo assim essa diferença existe, reflete a estabilidade relativa e a precisão qualitativa dos objetos, dos fenômenos, da realidade. “Cada conceito está em certa *relação*, em determinada conexão *com todos os demais*” – escreveu Lênin. (KOPNIN 1978, p. 211, grifos do autor)

Portanto, o nuclear do conceito de sistema linear é: um conjunto de, no mínimo, duas equações lineares que pode ou não possuir solução. E, de acordo com o lógico-histórico, é possível estabelecer conexões entre o conceito de sistema linear e os conceitos de: equação, equação linear,

incógnita, linearidade, determinante, método de eliminação de Gauss, tipos de sistemas, métodos de solução de um sistema.

4 Considerações Finais

O lógico, “[...] reflete não só a história do próprio objeto como também a história do seu conhecimento” (KOPNIN, 1978, p. 186). Daí a unidade entre o lógico e o histórico ser premissa necessária para a compreensão do processo de movimento do pensamento, da criação da teoria científica. Em seu desenvolvimento intelectual individual, o homem repete em forma resumida toda a história do pensamento humano. “*A unidade entre o lógico e o histórico é premissa metodológica* indispensável na solução de problemas da inter-relação do conhecimento e da estrutura do objeto e conhecimento da história de seu desenvolvimento” (KOPNIN, 1978, p. 186, grifos do autor).

Referências

DAVYDOV, V. V. *Problemas do ensino desenvolvimental: A experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia*. Tradução José Carlos Libâneo e Raquel A. M. M. Freitas, de *Problems of developmental Teaching – The experience of theoretical and experimental psychological research*. Soviet Education, Ago. 1988, vol. XXX, nº. 8.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FREITAS, R. A. M. M. Aprendizagem e formação de conceitos na teoria de Vasili Davydov. In: LIBÂNEO, José Carlos; SUANNO, Marilza Vanessa Rosa; LIMONTA, Sandra Valéria (Org.). *Concepções e práticas de ensino num mundo em mudança*. Diferentes olhares para a Didática. Goiânia: CEPED/Editora PUC Goiás, 2011, p. 71-84.

KLEINER, Israel. *A history of abstract algebra*. Boston, USA: Birkhäuser, 2007.

KOPNIN, P. V. *A dialética como lógica e teoria do conhecimento*. Tradução Paulo Bezerra. Coleção Perspectivas do Homem, Volume 123. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

O’CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. *Matrices and determinants*. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants.html>. Acesso em: 26 out. 2016. School of Mathematics and Statistics. University of St Andrews, Scotland. Escócia, 2016a.

VYGOTSKI, L. S. *A Formação Social da Mente*. Tradução José Cipolla Neto; Luís Silveira Menna Barreto e Solange Castro Afeche. 4 ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

Estudo de Triângulos e Quadriláteros: Uma abordagem experimental em sala de aula

Mendes, Adolfo de Oliveira
Instituto Federal de Goiás, IFG
adolfo.mendes@hotmail.com
Abril de 2019

1 Introdução

No Ensino fundamental durante décadas, o Ensino de Geometria sempre foi abordado no final do ano letivo. O estudo de triângulos e quadriláteros que será abordado na oficina é parte da disciplina Tópicos de geometria que foi trabalhado no curso de licenciatura em Matemática no IFG – campus Goiânia. Toda a geometria elementar foi abordada de forma experimental.

2 Desenvolvimento da Oficina

O objetivo central dessa oficina é discutir metodologias alternativas que facilitem a aprendizagem em Geometria; já que o ensino de Geometria ficou relegado - durante décadas - a segundo plano no País, principalmente no ensino fundamental. Sob a perspectiva de educação Matemática, serão abordados triângulos e quadriláteros. Utilizando papel sulfite, compasso, régua, transferidor e tesoura, os participantes serão motivados a participarem da construção do conhecimento em Geometria através de atividades experimentais investigativas na verificação experimental de propriedades e teoremas sobre triângulos e quadriláteros. Também se pretende com essa oficina a resolução de problemas que integram Geometria e Aritmética. Palavras – chave: Estudo de triângulos e quadriláteros; Educação Matemática, aprendizagem em geometria, ensino fundamental.

3. Considerações Finais

Através dessa oficina, espera-se que os participantes possam ter uma nova perspectiva com relação ao ensino aprendizagem da geometria

4. Referências

1. IEZZI, Gelson; Osvaldo Dolce; Antônio Machado. Matemática e realidade- 7ª série- 4 ed reform - São Paulo: Atual, 2000.
2. DANTE, Luiz Roberto- Tudo é Matemática. 7ª série- São Paulo: Editora Ática,2002.
3. PIRES, Célia Carolino; Eda Cury; Ruy Pietripaolo- Educação Matemática-7ª série-São Paulo: Atual, 2001.

Utilizando O Material Dourado Como Uma Alternativa de Ensino Aprendizado de Equação de Segundo Grau

ARAÚJO, Maxwell Gonçalves

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Licenciatura em Matemática, Câmpus Goiânia, IFG
mxnte@yahoo.com.br

AVELAR, Emilaine Ribeiro Nogueira de

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Licenciatura em Matemática, Câmpus Goiânia, IFG
emilainern@outlook.com

OLIVEIRA, Juliana Moreno

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Licenciatura em Matemática, Câmpus Goiânia, IFG
julianamoreno.oliveira@gmail.com

25 de Março de 2019

1 Introdução

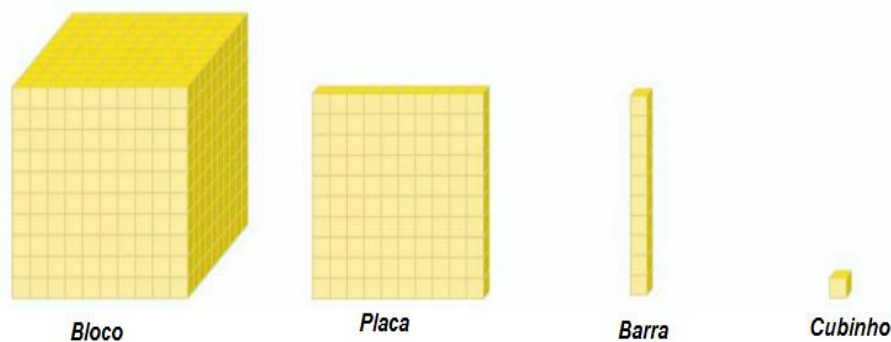
Maria Montessori, italiana e médica, ao “estudar o comportamento de um grupo de jovens com retardos mentais [...] constatou que suas necessidades e seu desejo de brincar permaneceram intactos” (RÖHRS, p 13) e que “muitas dessas crianças [...] eram submetidas aos exames escolares públicos, e obtinham resultados semelhantes, ou melhores, aos das crianças das escolas comuns” (BARRETO). Intrigada com o modelo de ensino vigente e instigada a buscar uma forma de educar as crianças, ela criou o método Montessoriano, o qual favorece o desenvolvimento de forma espontânea, livre e independente.

Além de teorias e práticas, o método é composto por um conjunto de recursos didáticos (materiais concretos) idealizados ou criados por aquela que o projetou. A utilização do mesmo na introdução de conteúdos programáticos, além de auxiliar no processo de ensino-aprendizagem e explicitar a matéria, possibilita uma mudança significativa no comportamento, pois a criança aprende a trabalhar em grupos, a respeitar regras, a dividir, a ganhar e a perder, fazendo com que o indivíduo se socialize.

Um dos recursos didáticos idealizados por ela é o Material Dourado, criado em meados do século XX através de estudos e observações. Ela percebeu que os educandos aprendiam com mais facilidade utilizando instrumentos palpáveis. Assim, o Material Dourado é uma alternativa para

trabalhar conteúdos matemáticos abstratos de forma concreta, visual, podendo ser utilizado no aprendizado das quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão), por exemplo. O material é composto por cubinhos, barras, placas e bloco, sendo o bloco formado por dez placas, a placa feita por dez barras e a barra gerada por dez cubinhos.

Figura 1 – Material Dourado



Fonte: <https://amorematernidade.com.br/material-dourado-desenvolvendo-o-raciocinio-de-uma-forma-gradavel/> (Imagem adaptada).

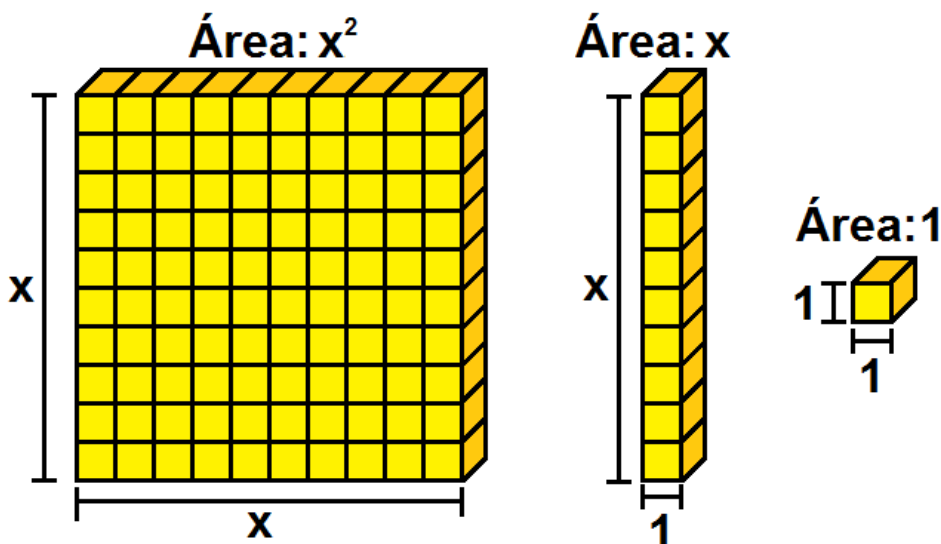
Com base nessas ideias iniciais, o foco dessa oficina utiliza-se de uma das possibilidades de se trabalhar com este material: resolver equações de segundo grau com raízes inteiras, utilizando-se do método desenvolvido pelo matemático mulçumano al-Khwarizmi. Influenciado por Euclides, ele resolvia as equações quadráticas de forma geométrica, utilizando símbolos para representar cada monômio e fazendo uso da técnica de completar quadrados.

2 Desenvolvimento

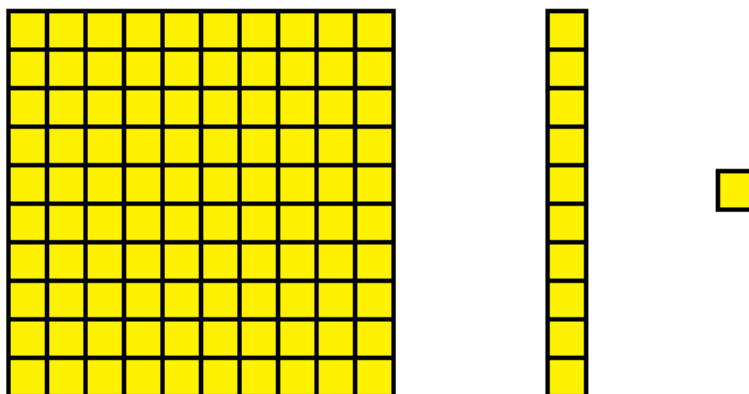
De forma sucinta, apresentaremos parte da história de Maria Montessori e a criação do Material Dourado. Em seguida, os alunos terão contato com esse material a fim de familiarizar-se com as peças. Revisaremos parte do conteúdo de equação de segundo grau e realizaremos uma competição com os alunos, em que deverão resolver algumas equações quadráticas utilizando o material concreto. É imprescindível que o discente tenha conhecimentos prévios de sistema de numeração, perímetro e área de retângulo.

Vale ressaltar que iremos utilizar apenas os cubinhos, barras e placas para formar retângulos, encontrar a forma fatorada das equações e, então, identificar suas raízes.

Figura 2 – Demonstração Material Dourado



Desenhos representativos:



Fonte: Arquivo pessoal

Ilustraremos equações obtidas a partir dos produtos notáveis (quadrado perfeito e produto da soma pela diferença) e outras equações que possuem raízes inteiras.

A lógica da montagem consiste em associar cada peça do material dourado aos monômios das equações de segundo grau. Em seguida, utilizaremos esses itens para construir retângulos de tal forma que a sua área seja única e identifique a forma fatorada da equação quadrática. Percebe-se

que ao montar as equações completas, utilizaremos os elementos do material descritos anteriormente. Já na equação incompleta, utilizaremos apenas dois componentes: placa e barra ou placa e cubinho.

Por fim, a turma será dividida em grupos e cada grupo receberá uma lista com algumas equações de segundo grau para serem resolvidas fazendo uso do Material Dourado. A cada acerto receberão um ponto. O grupo que pontuar mais receberá um prêmio. Dessa forma, estimularemos o espírito competitivo tornando a prática da resolução de exercícios mais divertida e atrativa.

3 Considerações Finais

Esperamos que essa oficina possa estimular o ensino e despertar o interesse pela matemática, tornando a aula mais prazerosa e fazendo com que o aluno se concentre no conteúdo. É importante ressaltar o quanto é significativo a aplicação do conteúdo da forma não tradicional, proporcionando ao discente o desenvolvimento da linguagem e do pensamento, da concentração e da atenção. O Material Dourado é um bom exemplo para se atingir esses objetivos, tornando a matemática uma disciplina mais prazerosa, mais dinâmica, mais visual.

Referências

- [1] BARRETO, Rute de Lira e ALMEIDA, Vera Lia Marcondes Criscuolo de. **MARIA MONTESSORI E SUA CONTRIBUIÇÃO PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA.** Disponível em: < <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/139601/ISSN2175-7054-2009-7970-7985.pdf?sequence=1> > Acesso em: 25 mar 2019.
- [2] RÖHRS, Hermann; tradução: Danilo Di Manno de Almeida, Maria Leila Alves. **Maria Montessori.** Recife: Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana, 2010. Disponível em: < <http://livros01.livrosgratis.com.br/me4679.pdf> >. Acesso em 25 mar 2019.

O Uso do Pacote qcc como Ferramenta Auxiliar em Estudos Relacionados ao Controle Estatístico de Qualidade

VASCONCELOS, Renata Mendonça Rodrigues

IME, UFG

renatamrv@ufg.br

MENDES, Felipe Franco

IME, UFG

felipefrancomendes@hotmail.com

31 de Março de 2019

1 Introdução

O conceito de qualidade pode ser definido de várias maneiras. A grande maioria apresentam uma compreensão conceitual de qualidade como algo relacionado a uma ou mais características desejáveis que um produto ou serviço deva ter. (Montgomery, 2004).

Costa et al. (2005) cita Juran (1999), Deming (2000), Crosby (1995) e Taguchi (1999) com as definições que eles propuseram para qualidade: Para Juran (1999), qualidade significa adequação ao uso. Para Deming (2000), qualidade significa atender e, se possível, exceder as expectativas do consumidor. Para Crosby (1995), qualidade significa atender às especificações. Para Taguchi (1999), a produção, o uso e o descarte de um produto sempre acarretam prejuízos (“perdas”) para a sociedade: quanto menor for o prejuízo, melhor será a qualidade do produto.

Contudo, Montgomery (2004) mostra uma definição com um teor mais estatístico: Qualidade é inversamente proporcional à variabilidade.

Em uma linha de produção as unidades não são exatamente iguais. Existe sempre uma variabilidade no processo. Essa expressão tem a ver com as diferenças existentes entre as unidades produzidas. Desde o início da Revolução Industrial, Shewhart preocupou-se em estudar a variabilidade dos processos de produção. Suas explicações sobre a impossibilidade de produzirem itens exatamente iguais são aceitas até hoje. Segundo ele, todo e qualquer processo, por mais bem projetado e por mais bem controlado que seja, possui em sua variabilidade um componente impossível de ser eliminado. Trata-se da variabilidade natural do processo, que é fruto de uma série de perturbações, ou causas aleatórias, contra as quais pouco ou nada se pode fazer. Quando o processo apresenta apenas a variabilidade natural, devida às causas aleatórias, diz-se que ele está *no estado de controle estatístico*, ou simplesmente em controle. (Costa et al. 2005)

Nenhum processo, porém, deixa de estar sujeito, também, à ocorrência ocasional de perturbações maiores, chamadas de causas especiais, que têm o efeito de deslocar a distribuição da variável aleatória (tirando sua média do valor alvo) e/ou aumentar sua dispersão. Uma causa especial é um problema ou modo de operação anormal do processo, que pode, portanto, ser corrigido ou eliminado. Quando, além das causas aleatórias de variabilidade, causas especiais estiverem presentes, diz se que o processo está fora de controle. (Costa et al. 2005)

Nesse contexto os gráficos de controle propostos por Shewhart (1931) ajudam a identificar se um processo está sob controle ou fora de controle. Em muitos casos que são definidos com várias características de qualidade fazem-se necessário o uso de gráficos de controle estatístico de qualidade univariado e, na maioria das vezes, multivariado. Com o objetivo de facilitar os estudos relacionados ao Controle Estatístico de Qualidade, apresentaremos aqui alguns recursos computacionais disponíveis que auxiliam e facilitam o monitoramento de processos e, consequentemente, contribui para uma melhor qualidade na linha de produção. Apresentaremos os tipos de gráficos mais importantes e mais utilizados em monitoramento de processos. Fazemos também uma introdução ao uso do pacote qcc do software R apresentando os comandos disponíveis no mesmo de forma simples e eficaz para a construção dos respectivos gráficos de controle.

2 Desenvolvimento

2.1 Gráficos de Controle

Muitas características da qualidade podem ser expressas em termos de uma medida numérica. Uma medida única de uma característica da qualidade, tal como dimensão, peso ou volume, é chamada variável. Gráficos de controle para variáveis são amplamente utilizados. Ao lidarmos com esse gráfico, usualmente, é necessário monitorar tanto o valor médio da característica da qualidade como a sua variabilidade. O gráfico da Figura 1 é o mais utilizado no controle da média do processo. E para controlar a variabilidade pode ser monitorado tanto através do gráfico S, como pelo gráfico R (mais usado). (Montgomery, 2004).

Muitas características da qualidade não podem ser representadas numericamente de modo conveniente. Em tais casos, usualmente classificamos cada item inspecionado como conforme ou não-conforme em relação às especificações para aquela característica da qualidade. As características de qualidade desse tipo são chamadas atributos. (Montgomery, 2004)

Os limites de controle com três desvios-padrão de afastamento em relação à linha média (“limites de 3 sigma”) foram propostos por Shewhart (1931), que se baseou no seguinte lema: “se o processo estiver em controle evite ajustes desnecessários que só tendem a aumentar a sua variabilidade?”. (Costa et al. 2005) Para variáveis contínuas têm-se os limites:

$$LSC_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}} \quad (1)$$

$$LM_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} \quad (2)$$

$$LIC_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}} \quad (3)$$

Com a abertura de três desvios-padrão, enquanto o processo estiver em controle, raramente um ponto cairá na região de ação do gráfico, o que seria indicação para intervir no processo, visando fazer os ajustes necessários. (Costa et al. 2005).

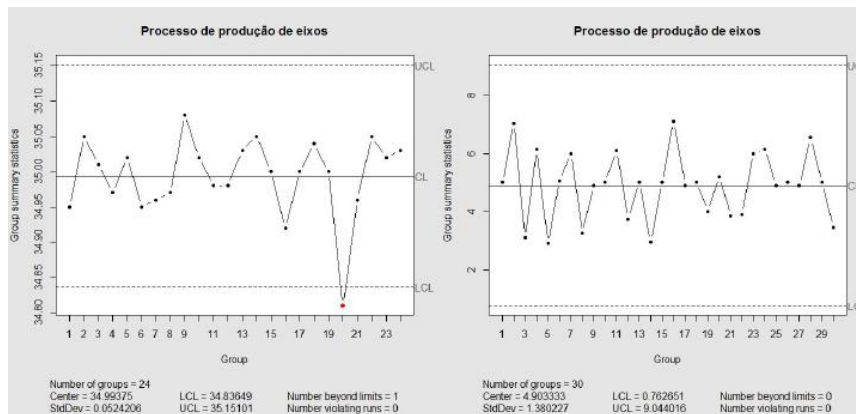


Figura 1: Gráficos de controle da média em dois processos de produção de eixos. Fonte: Controle Estatístico de Qualidade. (Costa et al. 2005)

2.2 Introdução ao pacote qcc

O pacote qcc (quality control charts) foi desenvolvido para o ambiente estatístico R. Foi apresentado em 2004 e vem sendo desenvolvido e aperfeiçoado constantemente. O pacote permite: Construir os gráficos CUSUM e EWMA para dados contínuos; Traçar curvas características de operação; Analisar a capacidade de processo; Traçar o gráfico de Pareto e o diagrama de causa-e-efeito; Construir gráficos de controle multivariado.

Inicialmente, o pacote foi escrito para fornecer uma ferramenta para alunos e professores para o aprendizado dos conceitos básicos do controle estatístico de qualidade, foi baseado no nível introdutório de alguns livros, entre eles Montgomery (2004).

Gráficos de controle para variáveis contínuas ou gráficos de controle para atributos, usualmente, são baseados em amostras de tamanho n com observações coletadas ao longo do tempo. Um objeto qcc opera com data frame, matriz ou vetor. No data frame e matriz, cada linha corresponde a uma amostra. Caso

todas as amostras estejam em um vetor, a função `qcc.groups` pode se usada para agrupá-las e adequar o conjunto em uma matriz.

O pacote `qcc` tem suporte para os principais gráficos de controle propostos por Shewhart (1931). Grande parte deles tem necessidade dos dados estarem em data frame ou matriz, porém o gráfico para valores individuais, onde cada amostra tem tamanho 1 ($n = 1$) é construído a partir de um vetor. Cada gráfico será tratado separadamente nas subseções 3.2 e 3.3. Os gráficos de Shewhart são criados todos pela função `qcc`, determina-se o tipo do gráfico no parâmetro `type` da função.

Os gráficos CUSUM (Cumulative sum) e EWMA (Exponentially weighted moving average) também podem ser construídos por funções que o pacote `qcc` possui. Esses gráficos são construídos de maneira semelhante aos gráficos de Shewhart, porém possuem funções diferentes para criá-los.

No que regem as aplicações usuais que utilizam do controle estatístico de qualidade nota-se a importância aqui e a grande utilidade que o software R pode exercer para obtenções de resultados no que rege o monitoramento de processos dentre outros procedimentos de produção. Além de fornecer um grande apoio computacional e facilitar nas análises que envolvem um grande número de observações, o acesso ao software é gratuito e de o mesmo é de fácil manuseio para quem tem principalmente uma noção de linguagem de programação. Os resultados obtidos comprovaram a eficácia do pacote `qcc` o que justifica um uso mais frequente dessa ferramenta nos mais diversos ramos industriais.

3 Considerações Finais

Além do software R, existem também outros softwares que são utilizados como auxílio computacional em estudos que envolvem o controle de qualidade. Entre eles estão, principalmente, SAS, Excel, STATISTICA e STATGRAPH. As desvantagens desses softwares são as licenças que podem chegar às cifras de milhares de reais anuais para utilizá-los, que é o caso do SAS. O R, sendo um software livre, é gratuito e permite a alteração de suas funções, o que torna possível a “customização” das saídas, adequando-as a problemas específicos. O pacote `qcc` foi “implementado” no ano de 2004 com algumas funções e desde então vem sendo atualizado para atender todas as opções de gráficos de controle. Este pacote pode operar tanto dados univariados contínuos ou atributos, como também dados multivariados.

Além disso, possui implementado os principais gráficos de controle utilizados na prática do monitoramento de processos. Por isso, o pacote `qcc` é uma boa ferramenta para o auxílio do controle da qualidade, na área industrial ou mesmo na área de serviço.

Referências

- [1] COSTA, Antônio Fernando Branco et al. Controle Estatístico de Qualidade. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2005.
- [2] CROSBY, Philip Bayard. Quality Without Tears: The Art of Hassle-Free Mana. 1. ed. New York: McGraw Hill Professional, 1995.
- [3] DEMING, William Edwards. Out of the Crisis. 2. ed. Cambridge: MIT Press, 2000.
- [4] JURAN, Joseph Moses; GODFREY, A. Blanton. Juran’s quality handbook. 5 ed. New York: McGraw Hill, 1999.
- [5] MONTGOMERY, Douglas C. Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.
- [6] R Development Core Team. R: A language and environment for statistical computing. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2012.
- [7] SCRULLA, Luca. `qcc`: an R package for quality control charting and statistical process control. R News, Boston, MA : R Foundation for Statistical Computing, v. 4, n. 1, junho, 2004.
- [8] SHEWHART, Walter Andrew. Economic Control of Quality of Manufactures Product/50th Anniversary Commemorative Issue. 2. ed. Wisconsin: American Society of Quality, 1980.
- [9] TAGUCHI, Genichi; CHOWDHURY, Subir; TAGUCHI, Shin. Robust Engineering: Learn How to Boost Quality While Reducing Costs & Time to Market. 1. ed. New York: McGraw Hill, 1999.

PROGRAMAÇÃO COM DEV-C++ NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Oliveira, Robson Medrado de

Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, UFG

robsonmedradooli@gmail.com

Moura Júnior, José dos Reis Vieira de

Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, UFG

zerjunior@yahoo.com

08 de Abril de 2019

1 Introdução

A programação está sendo utilizada como uma importante ferramenta para aprendizagem e raciocínio lógico das pessoas, tornando-as criativas e reflexivas. Segundo [1] a programação é talvez a habilidade chave necessária para a alfabetização do século *XXI*. Toda vez que as pessoas baixam uma música ou vídeo, realizam uma busca no Google, ou usam qualquer software, esses comandos são de fato, programação. Para preparar as pessoas para suas vidas, precisamos ajudá-las a maximizar suas ferramentas, ampliando suas habilidades de programação. Muitos estudantes já são proficientes o suficiente em muitos programas. As escolas devem ensinar ativamente os mesmos essa tecnologia e incentivá-los a usá-la para melhorar assim suas práticas [1, 2].

O uso da programação auxilia no aprendizado do aluno ajudando-o a alcançar a fase de compreensão de conceitos matemáticos. Visa a reflexão sobre os resultados de suas ações e ideias, e essa reflexão é o mecanismo pelo qual o aprendiz se torna consciente de seu conhecimento e, assim, pode transformar seus esquemas mentais em operações mais complexas [4, 5].

Todos possuem ideias e necessidades passíveis de soluções em programação. Assim, ser fluente digitalmente vai muito além de saber fazer uso de ferramentas tecnológicas na condição de consumidor. Espera-se saber como construir coisas significativas por meio dessas ferramentas. Deste modo a programação utiliza-se da linguagem matemática para facilitar a vida das pessoas, haja vista que na atualidade existem inúmeros problemas que só podem ser resolvidos através de algoritmos sofisticados [6].

Assim, objetivo desse trabalho é utilizar programação em C com o Dev - C++ como uma auxílio na aprendizagem de conceitos matemáticos e da própria linguagem de programação.

2 Desenvolvimento

2.1 Estudando as Médias

Ao estudar um certo fenômeno estatístico, recorreremos a parâmetros que se assemelham com as propriedades da distribuição dos dados relativos a esse fenômeno [3]. No exemplo a seguir vamos estudar o parâmetro de tendência central: a média aritmética.

Definição 1: A média aritmética de n números representa a soma de todos os n números dividida pelo total n .

Exemplo 1: As idades dos Jogadores titulares de basquete são: 30 anos, 28 anos, 22 anos, 31 anos e 21 anos. Qual é a idade média aritmética dos jogadores titulares dessa equipe?

Solução:

$$Média = \frac{30 + 28 + 22 + 31 + 21}{5} = \frac{132}{5} = 26.4 \text{ anos}$$

Exemplo 2: Escreva um algoritmo em linguagem C que calcula a média aritmética com $n=5$.

Solução: Observe a Figura 1.

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>
int main()
{
    float media, N1, N2, N3, N4, N5;
    printf("Digite o valor de N1:");
    scanf("%f", &N1);
    printf("Digite o valor de N2:");
    scanf("%f", &N2);
    printf("Digite o valor de N3:");
    scanf("%f", &N3);
    printf("Digite o valor de N4:");
    scanf("%f", &N4);
    printf("Digite o valor de N5:");
    scanf("%f", &N5);
    media= (N1 + N2 + N3 + N4 + N5)/5;
    printf("\n media=%f \n", media);
}

```

Figura 1: Código em C para o cálculo da média aritmética para $n = 5$.

Observação: Para $n > 5$ o procedimento é análogo, basta fazer uma adequação do código.

2.2 Equação do 2º grau

Definição 2: Denomina-se equação de 2º grau na incógnita x toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b, c são números reais e $a \neq 0$.

O Matemático e Astrônomo al- Khowarizmi viveu entre 780 – 850. A maioria de suas obras são conhecidas através das traduções feitas para o latim. Escreveu uma aritmética com exposição completa sobre números hindus e um tratado de Álgebra. Baseando na interpretação geométrica dada pelos gregos à expressão $(a + b)^2$, al- Khowarizmi estabeleceu um processo geométrico para a resolução de equações de 2º grau com uma incógnita denominado de método de completar quadrados [3].

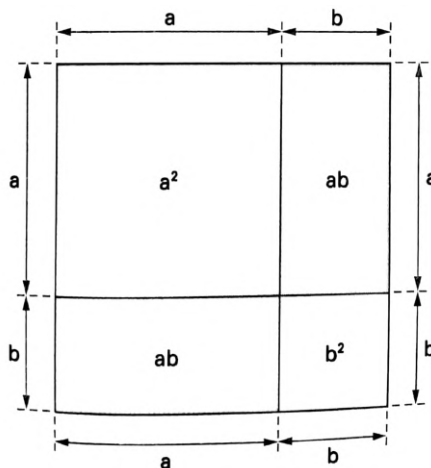


Figura 2: Interpretação geométrica de $(a + b)^2$ [3].

Baseado na ideia de al- Khowarizmi vamos completar o quadrado da expressão $x^2 + 6x$. Pode escrever essa expressão da seguinte forma:

$$x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot (3x)$$

em que x^2 é a área do quadrado cujo lado medem x e $3x$ área do retângulo cujos lados medem 3 e x . Logo, construindo a figura de acordo com interpretação geométrica dada tem-se:

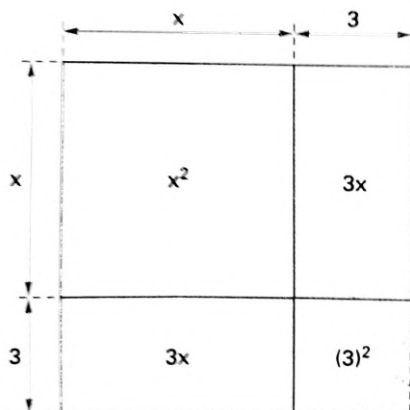


Figura 3: Interpretação geométrica de $x^2 + 6x$ [3].

Vamos resolver uma equação do $x^2 + 6x + 8 = 0$ com uma incógnita utilizando essa interpretação geométrica, considerando a expressão $x^2 + 6x$, temos:

$$x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot (3x)$$

Pela Figura 3 temos que é necessário acrescentar o número $(3)^2$ à expressão dada, obtendo assim o quadrado perfeito. Voltando a expressão original tem-se:

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$x^2 + 6x = -8$$

$$x^2 + 6x + 9 = -8 + 9$$

$$(x + 3)^2 = 1$$

Logo, extraindo a raiz em ambos os membros da equação anterior temos $x_1 = -2$ e $x_2 = -4$. Portanto $S = \{-4, -2\}$.

Exemplo 3: Aplique o método de completar quadrado na equação geral $ax^2 + bx + c = 0$ para encontrar suas soluções. **Solução:**

Inicialmente vamos dividir todos os termos da equação geral por $a \neq 0$:

$$\frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Afim de que o primeiro membro se torne um quadrado perfeito, adicionamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ no primeiro e segundo membros, tem-se:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Portanto temos $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ que são as soluções gerais da equação $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b, c são números reais e $a \neq 0$.

Para que o aluno possa comparar suas soluções feitas manualmente o próximo passo será resolver as mesmas através de um algoritmo.

Exemplo 4: Faça um algoritmo usando as soluções x_1 e x_2 para resolver uma equação do 2º grau qualquer com uma incógnita.

Solução: Observe a Figura 4.

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
int main()
{
    float delta, x1, x2, a, b, c;
    printf("Digite o valor de a diferente de zero:");
    scanf("%f", &a);
    printf("Digite o valor de b:");
    scanf("%f", &b);
    printf("Digite o valor de c:");
    scanf("%f", &c);
    delta= b*b - 4*a*c;
    x1= (-b + sqrt(delta))/2*a;
    x2= (-b - sqrt(delta))/2*a;
    if(delta < 0)
    {
        printf(" nao existe valor real \n");
    }
    else
    {
        printf("\n x1 = %f, x2 = %f", x1, x2);
    }
}
```

Figura 4: Código em C para o cálculo das raízes de uma equação do 2º grau com uma incógnita.

3 Considerações Finais

A programação articulada com a resolução de problemas possibilita a sistematização e apropriação de conceitos matemáticos. Na construção de algoritmos para solução dos problemas, os estudantes precisa entender e compreender os conceitos matemáticos envolvidos nessa construção e a programação pode ser utilizada como um suporte para os alunos "confrontar" suas soluções.

Acreditamos que a programação é uma importante ferramenta para auxiliar o professor nos ensino da matemática nos níveis fundamental, médio e superior. Após a programação dos exemplos propostos os alunos terão uma ideia mais precisa do que é e como deve ser construído um programa em C.

Assim a programação possibilita a promoção de trabalho mais cooperativo, que coloca o erro como elemento natural no processo de aprendizagem, e torna a aprendizagem mais interativa.

Referências

- [1] PRENSKY, Marc. *Listen to the Natives*. In: Educational Leadership. v. 63, n. 4, p.8-13, 2005.
- [2] PRENSKY, M. *Teaching digital natives: partnering for real learning*. California: Corwin, 2010.
- [3] GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI, José Ruy. *A conquista da Matemática: Teoria e aplicação*. FTD, 1992.
- [4] VALENTE, José Armando. (org). *O computador na sociedade do conhecimento*. Campinas: Unicamp/NIED, 1999.
- [5] VALENTE, José Armando. *O Professor no Ambiente Logo: formação e atuação*. Campinas: Gráfica da UNICAMP, 1996.
- [6] RESNICK, Mitchel. *Vamos ensinar as crianças a escrever códigos*. 2012.

Probabilidade Geométrica e Aplicações

Santos, Fabiano Fortunato Teixeira dos

Instituto de Matemática e Estatística, UFG

fortunato@ufg.br

23 de Fevereiro de 2019

1 Introdução

A primeira definição formal de Probabilidade foi dada pelo polímata italiano Jerônimo Cardano (1501-1576), na obra *Liber de Ludo Aleae* (Livro dos Jogos de Azar). Nesse trabalho, que somente foi publicado em 1663, após a sua morte, Cardano introduziu técnicas de combinatória para calcular a quantidade de possibilidades favoráveis em um evento aleatório. Assim, pode calcular a Probabilidade de ocorrência do evento de interesse como a razão entre a quantidade de possibilidades favoráveis e a quantidade total de possibilidades associadas a tal evento.

A Probabilidade que se aprende na escola é apresentada na sua forma clássica, e pressupõe que o espaço amostral associado ao experimento aleatório em estudo seja finito e equiprovável. Dessa forma, se o evento que contempla os casos favoráveis A possui $n(A)$ elementos e o espaço amostral S contém $n(S)$ elementos, então, a Probabilidade de que o evento A ocorra, $P(A)$, é definida como $P(A) = n(A)/n(S)$. Isso significa que $P(A)$ é a proporção de resultados no espaço amostral que estão contidos em A .

A Matemática toda passou por um processo de axiomatização a partir da segunda metade do século XIX, e a definição para Probabilidade, do matemático russo Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1927), faz parte desse processo. Kolmogorov afirmou que a teoria das Probabilidades poderia ser desenvolvida a partir de axiomas, da mesma forma que a geometria e a álgebra. Nesses axiomas, ficam estabelecidos os entes matemáticos a serem estudados e as relações entre eles.

A definição axiomática de Kolmogorov para a Probabilidade é a seguinte:

Seja S um conjunto não vazio. Uma Probabilidade em S é uma função de conjunto $P(\cdot)$, que associa a subconjuntos A de S um número real $P(A)$, que satisfaz:

- i) para todo $A \subseteq S$ vale que $0 \leq P(A) \leq 1$;
- ii) $P(S) = 1$;
- iii) se $A \subseteq S$, $B \subseteq S$ e $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dessa forma, a Probabilidade clássica é um caso particular da definição axiomática.

Quando o espaço amostral não é finito, é necessária uma abordagem diferente da Probabilidade clássica. Suponha que o experimento aleatório consista em escolher, ao acaso, um ponto do círculo de raio 1 centrado na origem. Então, um espaço amostral associado a esse experimento é o conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$. Como calcular a Probabilidade de que a distância entre do ponto escolhido e a origem seja menor do que $1/2$? O evento de interesse é $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1/2\}$ e $P(A)$ não pode ser calculado como $n(A)/n(S)$. No entanto, a ideia de proporção sugere que $P(A)$ pode ser calculada levando-se em conta as áreas de A e S . Veja que a proporção $\frac{\text{Área de } A}{\text{Área de } S}$ está bem definida, pois as áreas de A e S o estão. Dessa forma, se definirmos $P(A) = \frac{\text{Área de } A}{\text{Área de } S}$, essa Probabilidade estará de acordo com a axiomatização de Kolmogorov e resolverá o problema.

Segundo Tunala (1992), se tiver uma região A do plano, contida em uma região S , admiti-se que a Probabilidade de um ponto de S também pertencer a A é proporcional à área de A , e não depende da posição que A ocupa em S . Portanto, selecionando ao acaso um ponto de S , a Probabilidade $P(A)$ de que ele pertença a A será $\frac{\text{Área de } A}{\text{Área de } S}$.

Esse é um caso particular da definição de Probabilidade Geométrica. Seria possível reescrever essa definição particular envolvendo o comprimento de segmentos ou o volume de sólidos. De forma geral, a definição envolve o quociente entre a medida do conjunto A e a medida do conjunto S .

O início do estudo da Probabilidade Geométrica se deu no século XVIII, a partir de um problema conhecido como Problema das Agulhas de Buffon. Em 1777, Georges-Louis Leclerc (1707-1788), matemático e naturalista francês,

conhecido como Conde de Buffon, apresentou em seu *Essai d'Arithmétique Morale* o seguinte problema:

Uma agulha de comprimento l é lançada em um plano marcado por linhas paralelas e separadas por uma distância d , com $l \leq d$. Qual a Probabilidade da agulha tocar em uma dessas linhas marcadas?

A Probabilidade de a agulha tocar alguma das linhas vale $2l/d\pi$ e nos permite encontrar estimativas para o número π . A partir do método utilizado para resolver o Problema das Agulhas de Buffon, é possível estimar o comprimento total dos canais de escoamento em uma bacia hidrográfica, bem como determinar a área de uma figura plana. O problema do cálculo da área, em particular, será explorado no minicurso, utilizando-se materiais concretos.

No mesmo livro em que foi publicado o problema das agulhas, Buffon apresentou-se o Jogo dos Discos, que consiste em:

Em um plano pavimentado com quadrados de lado l é lançado aleatoriamente um disco de diâmetro d . Qual a Probabilidade de o disco, depois de pousar no plano, não intersectar e nem tangenciar os lados de quadrado algum?

Esse exercício pode ser realizado em sala de aula, e, se chamarmos de vitória o evento que consiste no disco não intersectar os lados de quadrado algum, pode-se discutir sobre o tamanho do raio do disco que maximiza a chance de vitória. O problema pode ser revisitado se considerarmos outros tipos de pavimentação do plano (PATERLINI, 2002), como triângulos equiláteros ou hexágonos regulares.

Outro problema que pode abordado em sala de aula utilizando material concreto é o seguinte:

Dividindo aleatoriamente um segmento em três partes, qual é a Probabilidade de que esses novos segmentos formem um triângulo?

Aqui, faz-se necessário relembrar as restrições sobre os comprimentos dos lados de um triângulo e o cálculo de áreas (WAGNER, 1997).

Outro tópico pouco abordado no ensino médio e que pode ser trabalhado por meio da Probabilidade geométrica é o estudo dos fractais. O Triângulo de Sierpinski, por exemplo, pode ser utilizado para apresentar o

conceito de Probabilidade Geométrica e reforçar o conceito de Probabilidade condicional, ao se propor a seguinte questão (LOPES, 2013):

Escolhendo-se ao acaso um ponto do triângulo, calcular a Probabilidade de esse ponto pertencer ao buraco central, após o segundo passo da construção do Triângulo de Sierpinski, sabendo-se que o ponto “caiu” em um buraco.

2 Justificativa

A Probabilidade Geométrica e suas aplicações são temas praticamente desconhecidos dos estudantes do ensino médio e dos cursos de graduação em Matemática. Tendo isso em vista, a proposta deste minicurso é apresentar essa forma alternativa de se calcular Probabilidades e algumas de suas aplicações dentro da própria Matemática e em problemas do mundo real, como o cálculo da área de uma região e o comprimento total dos canais de escoamento em uma bacia hidrográfica.

3 Objetivos

Objetivo Geral:

Mostrar o uso da Probabilidade Geométrica no mundo real e na própria Matemática, por meio de atividades que possam ser realizadas em sala de aula.

Objetivos Específicos:

- Construir e/ou reconstruir conceitos de Probabilidade Geométrica;
- Utilizar a Probabilidade Geométrica na resolução de problemas, teóricos e práticos;
- Fomentar uma prática pedagógica de ensino que promova a participação dos estudantes.

4 Metodologia

Este minicurso consiste em dois encontros, de 1h30min cada, totalizando três horas de atividade, divididas em dois momentos:

- Primeiramente, haverá um momento dedicado à revisão dos conteúdos de Probabilidade clássica, e, a partir disso, será introduzido o conceito de Probabilidade Geométrica.
- Depois dessa parte introdutória, serão resolvidos os seguintes problemas: a divisão de um segmento em três partes; a escolha de pontos em um Triângulo de Sierpinski; Jogo dos discos; Problema das Agulhas de Buffon; a estimativa do número π ; o comprimento total dos canais de escoamento em uma bacia hidrográfica; a área de figuras planas.

A divisão de um segmento em três partes e a área de figuras planas serão apresentados e resolvidos com o apoio de materiais concretos.

Referências

LOPES, J. M.; SALVADOR, J. A.; BALIEIRO FILHO, I. F. O Ensino de Probabilidade Geométrica por meio de Fractais e da Resolução de Problemas. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 7, n. 3, p.47-62, 2013.

WAGNER, E. Probabilidade Geométrica. O Problema do Macarrão e um Paradoxo Famoso. **Revista do Professor de Matemática**, v. 34, p. 28-35, 1997.

PATERLINI, R. R. O Problema do Jogo dos Discos. **Revista do Professor de Matemática**, v. 48, p. 13-19, 2002.

TUNALA, N. Determinação de Probabilidades por Métodos Geométricos. **Revista do Professor de Matemática**, v. 20, p. 16-22, 1992.

A magia por traz da Matemática Financeira*

Barreto, Wesley Pinheiro

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, departamento II, campus Goiânia, IFG
wesley.barreto@ifg.edu.br

25 de Março de 2019

1 Breve Resumo

Este Minicurso tem por objetivo dar acesso ao conhecimento de matemática financeira a ser utilizado como instrumento para guiar na administração das despesas, nas possibilidades de créditos e construir o futuro. Na sociedade atual, o consumismo está em todas as classes sociais. Com a facilidade para conseguir créditos, empréstimos e financiamentos é preciso escolher a melhor opção para obter um produto. O Minicurso vem mostrar o desdobramento de situações do dia-a-dia como: “comprar ou alugar um carro?”. “Alugar ou obter a casa dos sonhos?”. “Pagar o valor máximo ou mínimo da previdência social?”

2 Pré-requisito

Matemática financeira a nível de ensino médio

3 Número Máximo de Participantes:

30 alunos

4 Recursos Necessários para a realização:

Lousa, pincel e datashow.

O Lema de Lax-Milgram e suas aplicações em Equações Diferenciais Parciais*

Batista, Marcos Roberto

{Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia}, {IFG}
marcos.batista@ifg.edu.br

7 de Março de 2019

1 Introdução

A Análise Funcional é o ramo da Matemática que estuda os espaços de funções, tendo suas raízes no estudo de transformações, tais como a Transformada de Fourier, e no estudo de equações diferenciais e integrais. A palavra “funcional” refere-se ao cálculo de variações, implicando uma função cujo argumento é outra função. Esta parte da Matemática pode ser considerada até certo ponto como uma generalização da Álgebra Linear, pois estuda espaços normados de dimensão infinita.

Neste minicurso, apresentamos o Lema de Lax-Milgram em Espaços de Hilbert, que é um importante resultado da Análise Funcional aplicado à Teoria das Equações Diferenciais Parciais.

2 Desenvolvimento

O principal objetivo deste minicurso é apresentar algumas técnicas usadas em Análise Funcional para resolver problemas envolvendo equações diferenciais parciais lineares e não lineares.

Inicialmente, estudamos os Espaços de Hilbert, trazendo exemplos e demonstrações dos principais resultados, como o Teorema da Representação de Riesz-Frechet.

A seguir, enunciamos e demonstramos o Lema de Lax-Milgram em Espaços de Hilbert, que é uma espécie de Teorema de Riesz-Frechet na qual as formas bilineares substituem os produtos internos.

Finalmente, fazemos duas aplicações, onde o teorema garante a existência e unicidade da solução para problemas elípticos de segunda ordem.

3 Considerações Finais

Resultados sobre existência e unicidade de soluções de problemas elípticos de segunda ordem são de suma importância na Física e Matemática Aplicada. Assim sendo, o estudo do Lema de Lax-Milgram constitui uma poderosa ferramenta para analisar uma certa classe destes problemas.

Referências

- [1] ADAMS, R.A. *Sobolev Spaces*. New York: Academic Press, 1975.
- [2] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. Berkeley: Berkeley Mathematics Lecture, 1993.
- [3] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1966.

O Outro Lado da Matemática

Neves, Gustavo Passinato

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, IFG
passinato11@gmail.com

21 de fevereiro de 2019

1 Introdução

De fato, ao se observar a visão popular atual da matemática tem-se um panorama um tanto quanto pessimista, pois não gostar de matemática é algo bem usual dentre a população. Entretanto isso se deve em parte a forma com que essa ciência é ensinada, de maneira mecânica, engessada e apenas como um conjunto de dogmas que devem ser seguidos cegamente. A matemática olímpica se contrapõe a isso, se colocando em uma posição que a astúcia e criatividade é capaz de superar a densidade excessiva de conteúdo.

2 Desenvolvimento

A fim de obter uma ideia geral de como é o universo da matemática olímpica, é proposto um minicurso tendo em vista a divisão em dois dias de uma hora e meia. No primeiro dia se dará enfoque a alguns tópicos da área de Teoria dos Números enquanto no segundo dia temas de Álgebra. Para promover uma maior aproximação entre o público e os assuntos, o minicurso possuirá o seguinte formato: Sucinta descrição teórica, em que serão especificadas com o devido rigor técnicas e teorias, seguida de uma Seção de Problemas Propostos que por sua vez serão escolhidos de maneira a trabalhar as técnicas e teorias abordadas inicialmente. Todos os problemas serão propostos de maneira a proporcionar um intervalo de tempo para que o público possa refletir em possíveis ideias e soluções, posterior a isso será apresentada uma solução.

Em cada área de enfoque serão abordados os seguintes tópicos teóricos:

1. Teoria dos Números

1.1 Paridade

Seja a um inteiro positivo podemos notar que a pode se escrito apenas de duas maneiras diferentes:

$$a = 2k \quad \text{ou} \quad a = 2k + 1$$

Para algum k inteiro positivo. E de acordo com cada representação a pode ser par ou ímpar, respectivamente.

Exemplo: [Olimpíada da Eslovênia 1992] Prove que para quaisquer inteiros positivos a_1, a_2, \dots, a_n

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_n - a_1|$$

É um número par.

Solução: Podemos inicialmente observar que $|a - b| = \pm a \pm b$. Logo a soma acima pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\pm a_1 \pm a_2 \pm a_2 \pm a_3 \pm \dots \pm a_n \pm a_1$$

Além disso podemos notar que cada termo aparece duas vezes, e isso nos dá os casos:

$$\pm a_i \pm a_i = a_i - a_i = 0$$

$$\pm a_i \pm a_i = a_i + a_i = 2a_i$$

$$\pm a_i \pm a_i = -a_i - a_i = -2a_i$$

Logo como em todas as possibilidades temos números pares a soma será par também. ■

1.2 Divisibilidade

Dados dois inteiros a e b dizemos que a divide b ou b é um múltiplo de a e escrevemos:

$$a|b$$

se existir um inteiro c tal que $b = ac$, caso contrário escrevemos $a \nmid b$

Propriedades (considere $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$):

- i. Se $d|a$ e $d|b$, então $d|ax + by$ para qualquer combinação linear $ax + by$ de a e b com coeficientes $x, y \in \mathbb{Z}$.
- ii. **(Limitação)** Se $d|a$, então $a = 0$ ou $|a| \geq |d|$.
- iii. **(Transitividade)** Se $a|b$ e $b|c$ então $a|c$.

Exemplo: [IMO 1959] Mostre que a fração $\frac{21n+4}{14n+3}$ é irredutível para todo n natural.

Solução:

Pela definição de divisibilidade temos que: $\frac{21n+4}{14n+3} \Rightarrow (14n + 3)|(21n + 4)$

$$\begin{aligned} \therefore (14n + 3) | 3(14n + 3) - 2(21n + 4) \\ \Rightarrow 14n + 3 | 1 \end{aligned}$$

Se supormos que a fração dada é redutível deve existir um $d > 1$ tal que $d | 1$ e $d | 14n + 3$ porém da propriedade (ii) temos que $|d| \leq 1$ o que é uma contradição, logo a fração é irredutível. ■

1.3 Congruência

Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Dizemos que a é congruente a b módulo n e escrevemos:

$$a \equiv b \pmod{n}$$

Se $n | a - b$.

Propriedades (considere $a, b, c, d, n \in \mathbb{Z}$):

- i. **(Reflexividade)** $a \equiv a \pmod{n}$;
- ii. **(Simétrica)** se $a \equiv b \pmod{n}$, então $b \equiv a \pmod{n}$;
- iii. **(Transitividade)** Se $a \equiv b \pmod{n}$ e $b \equiv c \pmod{n}$, então $a \equiv c \pmod{n}$;
- iv. **(Compatibilidade com a soma e diferença)** Podemos somar e subtrair “membro a membro”:

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{n} \\ c \equiv d \pmod{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + d \pmod{n} \\ c - a \equiv d - b \pmod{n} \end{cases}$$

- v. **(Compatibilidade com o produto)** Podemos multiplicar “membro a membro”:

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{n} \\ c \equiv d \pmod{n} \end{cases} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{n}$$

- vi. **(Cancelamento)** Se $\text{mdc}(a, c) = 1$, então

$$ac \equiv bc \pmod{n} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}.$$

Exemplo: Mostre que a equação $x^4 + 131 = 3y^4$ não tem solução se x e y forem inteiros.

Solução: Vamos lembrar do seguinte teorema:

Pequeno Teorema de Fermat: Sejam $a, p \in \mathbb{Z}$, com $p \in \mathbb{P}$ e $\text{mdc}(a, p) = 1$, temos que:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Sabendo disso vamos supor que exista $x, y \in \mathbb{Z}$, que sejam soluções da equação dada, e vamos também analisar a equação dada módulo 5, consideremos primeiro o caso em que x e y são múltiplos de 5, temos então:

$$x^4 + 131 \equiv 3y^4 \pmod{5} \Rightarrow 131 \equiv 0 \pmod{5} \text{ o que é um absurdo}$$

Se apenas x é múltiplo e y não é múltiplo de 5, pelo Pequeno teorema de Fermat, temos:

$$x^4 + 131 \equiv 3y^4 \pmod{5} \Rightarrow 131 \equiv 3 \pmod{5} \text{ que também nos dá um absurdo}$$

Se y é múltiplo de 5 e x não é, pelo mesmo argumento temos:

$$x^4 + 131 \equiv 3y^4 \pmod{5} \Rightarrow 1 + 131 \equiv 0 \pmod{5} \text{ que por sua vez também é um absurdo.}$$

Por fim, se x e y são ambos não múltiplos de 5 temos:

$$x^4 + 131 \equiv 3y^4 \pmod{5} \Rightarrow 1 + 131 \equiv 3 \pmod{5} \text{ que também é um absurdo}$$

Como essas são todas as possibilidades para x e y , nossa suposição está errada e $\nexists x, y \in \mathbb{Z}$ que sejam solução da equação dada.

■

2. Álgebra

2.1. Funções

Nesse tópico serão trabalhados conceitos como a utilização das definições de domínio e contradomínio para resolver problemas. Problemas envolvendo equações funcionais, evidenciando técnicas de substituições e a importância de se checar valores iniciais.

2.2. Fatorações úteis

Essa com certeza se trata de uma das ferramentas mais poderosas da matemática. Serão trabalhados nesse tópico produtos notáveis, expansões multinomiais (Polinômio de Leibniz) e suas aplicações em simplificação de expressões algébricas.

2.3. Desigualdades

Nesse tópico serão abordados conceitos como A Desigualdade entre as Médias, desigualdade de Cauchy-Schwarz, desigualdade triangular, bem como desigualdades como ferramenta para limitação de funções.

3 Pré-requisitos

Matemática básica, além de interesse por desafios.

4 Número máximo de participantes

Capacidade total do local reservado para a atividade.

5 Recursos necessários

Giz ou pincel (dependendo do material do quadro do local reservado),
impressão de Lista de Exercícios Propostos (Anexo I) para cada participante.

6 Considerações Finais

Com esse minicurso pretende-se modificar a visão geral da matemática, além de apresentar técnicas que por sua simplicidade ou por sua necessidade de criatividade acabam ajudando aqueles que às aprendem em toda sua vida, acadêmica ou não, pois a matemática está em tudo!

Bibliografia

Barbosa, A. (2018, agosto 4). Lista de exercícios de funções.

FEND, T. A. (2001). *101 PROBLEMS IN ALGEBRA FROM THE TRAINING OF THE USA IMO TEAM*.
Australía: AMT PUBLISHING.

Hefez, A. (2016). *Curso de Álgebra*. Rio de Janeiro : Sociedade Brasileira de Matemática .

M. S. Klamkin. (1986). *International Mathematical Olympiads 1978 - 1985*. The Mathematical
Association of America.

Martinez, F. B. (2018). *Teoria dos Números Um passeio com primos e outros números
familiares elo mundo inteiro*. Rio de Janeiro : Sociedade Brasileira de Matemática .

Neto, A. C. (2016). *Tópicos de Matemática Elementar*. Rio de Janeiro : Sociedade Brasileira de
Matemática .

S. B. Feitosa, B. Holanda, Y. Lima, & C.T. Magalhães. (2010). *Treinamento Cone Sul 2008*.
Fortaleza : Realce .

Santos, J. P. (2015). *Introdução à teoria dos Números*. Rio de Janeiro : Sociedade Brasileira de
Matemática .

Tao, T. (2013). *COmo Resolver Problemas Matemáticos*. Rio de Janeiro : Sociedade Brasileira
de Matemática .

Potenciação Matemática

Siva, Nayane Nayara

Instituto Federal de Goiás, campus Goiânia, IFG
nayane_nayara@live.com

Couto, Kelvin Rodrigues

Instituto Federal de Goiás, campus Goiânia, IFG
kelvin.couto@ifg.edu.br

30 de Março de 2019

1 Introdução

Potenciação matemática é um tema básico, e por isso é essencial que as definições e propriedades estejam bem entendidas. Ao se analisar livros de formação básica percebemos que, em muitos, o tema não é tratado com a atenção e formalismo que a matemática exige. Buscando cobrir possíveis lacunas na formação básica desenvolvemos este trabalho. Começaremos com expoentes inteiros, depois estendemos a definição aos expoentes racionais e por fim definimos potências com expoentes reais. Enunciaremos as propriedades que serão discutidas com mais detalhes na apresentação do trabalho.

2 Desenvolvimento

Começaremos definindo potenciação para expoentes inteiros.

Definição 1 *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$, dizemos que a potência de base a e expoente n é o número denotado por a^n e definido pelas condições:*

1. $a^0 = 1$, com $a \neq 0$;
2. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$ para $n \geq 1$;
3. $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ para $n \leq -1$, com $a \neq 0$.

Considerando $a \in \mathbb{R}$ e $n, m \in \mathbb{Z}$ partir da definição 1 podemos demonstrar as seguintes propriedades:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, com $a \neq 0$;
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, com $b \neq 0$;
5. $(a^n)^m = a^{mn}$

A definição 1 pode ser estendida para expoentes racionais. Definiremos a seguir.

Definição 2 *Sejam a um número real positivo não nulo e $\frac{p}{q}$ um número racional, com $q > 0$. Definimos:*

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad e \quad 0^{\frac{p}{q}} = 1.$$

As mesmas propriedades que resultam da definição 1 também resultam da definição 2. Potências também podem ser trabalhadas com expoentes irracionais, e as propriedades são as mesmas satisfeitas para expoentes racionais. Para trabalharmos com potências de expoentes irracionais w , fazemos aproximações de w por números racionais.

Para formalização da definição de potências para expoentes irracionais precisaremos do seguinte resultado de Cálculo diferencial e Integral.

Teorema 3 *Seja $a > 0$ e $a \neq 1$ um real qualquer. Existe uma única função f , definida e contínua em \mathbb{R} , tal que $f(r) = a^r$ para todo racional r .*

Podemos agora enunciar a definição potência com expoente real.

Definição 4 *Seja $a > 0$ e $a \neq 1$ um real qualquer e f como no último teorema. Definimos potência de base a e expoente real por*

$$a^x = f(x)$$

3 Considerações Finais

Este trabalho buscou esclarecer a definição e propriedades de potências. Recomendamos ao leitor que explore exercícios em caso de dúvidas e outras bibliografias. O próximo passo natural seria o estudo de função exponencial e do conceito de radiciação.

Referências

- [1] Iezzi, G.; et al. *Matemática Primeira Série Segundo grau*. São Paulo: Editora Atual, 1990.
- [2] Guidorizzi, H. L., *Um Curso de Cálculo*, Vol. 1. Riço de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1997.

Minicurso: Produção de relatórios estatísticos com R Markdown

VedoVatto, Thiago

{Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás}, {IFG}

thiagovedovatto@gmail.com.br

19 de Março de 2019

Resumo

R Markdown é um formato de arquivo para fazer documentos dinâmicos com a linguagem R (R, 2018). Um documento R Markdown é escrito em `markdown`, um modo fácil de escrever arquivos de texto simples por meio da inserção de pedaços de código R embutidos. Duas ótimas referências sobre esse formato estão em Xie et al. (2018) e Allaire et al. (2019).

Os arquivos R Markdown são usados em conjunto com o pacote `rmarkdown` que pode ser facilmente instalado pelo seguinte comando no terminal R.

```
install.packages("rmarkdown")
```

Esse pacote vem instalado por padrão na IDE RStudio. O relatório final é obtido quando o arquivo `markdown` é transformado em uma página HTML, PDF ou arquivo MS Word usando o pacote `knitr` (Xie, 2019).

Objetivo

- Fazer análises descritivas com gráficos e estatísticas básicas;
- Construir um relatório descritivo de um conjunto de dados usando R Markdown.

Público alvo

Alunos dos cursos de licenciatura em matemática ou áreas afins.

Recursos necessários para a realização

- Laboratório de informática com o software R e a IDE RStudio instalados;
- Projetor.

Pré-requisitos

Conhecimentos de informática básica

Número máximo de participantes

30 pessoas (ou tantas pessoas quanto couberem num laboratório)

Referências

- Allaire, J. J., Xie, Y., McPherson, J., Luraschi, J., Ushey, K., Atkins, A., Wickham, H., Cheng, J., Chang, W., and Iannone, R. (2019). *rmarkdown: Dynamic Documents for R*. R package version 1.12.
- R, D. C. T. (2018). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. R-3.4.3.
- Xie, Y. (2019). *knitr: A General-Purpose Package for Dynamic Report Generation in R*. R package version 1.22.
- Xie, Y., Allaire, J. J., and Golemund, G. (2018). *R Markdown: The Definitive Guide*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida. ISBN 9781138359338.

POR ONDE ANDA OS EGRESSOS DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO IFG-GOIÂNIA E QUANTOS EXERCEM A PROFISSÃO DE PROFESSOR?

Neto, Manoel Alves de Queiroz

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, IFG
manoel.alves@gmail.com

Araujo, Maxwell Gonçalves

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, IFG
mxnte@yahoo.com.br

4 de Abril de 2019

1 Introdução

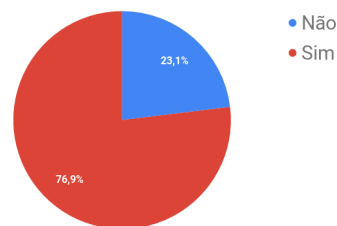
Levantar os números de egressos do Curso de Licenciatura em Matemática do IFG–Goiânia e bem como se esses profissionais formados estão exercendo a profissão de professor de matemática e se estão especializando na área de formação.

2 Desenvolvimento

Este trabalho consiste em verificar o número de egresso do Curso de Licenciatura em Matemática do IFG–Goiânia. Onde atualmente tem 59 egressos ate o semestre 2018/2. O curso se iniciou em 2010 com uma turma de 30 alunos e hoje estamos na décima sétima turma (2019/1). Para que possamos verificar quais estão exercendo a profissão de professor, nos entramos em contato com os mesmo com ajuda da coordenação, onde forneceu os contatos, como telefone e e-mail. Também alguns já tínhamos contatos por ter estudados juntos ou conhecidos no decorrer do curso. Então nos começamos pela PPC do Curso de Licenciatura em Matemática do IFG. Com isso observamos outros fatores como à história do IFG (Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás), onde se deu inicio lá no ano de 1909 na antiga Escola de Aprendizes Artífices depois passou a ser chamada de Escola Técnica de Goiânia isto por volta do ano 1642. Posteriormente em 1959 mudou para Escola Técnica Federal de Goiânia até então era destinada para curso de trabalhadores sem formação técnica. A partir da transformação para Escola Técnica Federal de Goiás houve uma mudança nos objetivos da instituição e do governo, onde começou a investir na educação profissional articulado com a educação básica. Sendo concomitante ou subsequente ao ensino básico (antigo segundo grau). E finalmente com a transformação em um centro de ensino superior surgiu o Centro Federal de Educação de Goiás. A partir daí deu uma estrutura melhor e passou a oferecer cursos técnicos integrados ao ensino médio ou subsequentes, cursos superiores e pós-graduação e técnicos integrados ao ensino de jovens e adultos. Transformou-se numa instituição referência nacional e multicampus. E em 2008 veio a ultima transformação que foi na elevação a status de universidade. Ai se criou o Instituto Federal de Educação de Goiás uma autarquia federal de ensino gratuito e verticalização do ensino. O IFG é composto por 14 campus com 42 cursos Técnicos Integrados ao Ensino Médio, 19 curso Técnicos Integrados ao Ensino Médio–EJA, 5 cursos Técnicos Subsequentes, 4 curso Tecnólogos, 20 cursos de Licenciatura, 26 cursos Bacharelados, 10 cursos de Especialização e 3 cursos de Mestrados Profissionais. Dentre eles podemos destacar 2 Licenciatura em Matemática (Goiânia e Valparaíso), 1 Especialização em Matemática (Goiânia) e 1 Mestrado Profissional em Ciência e Matemática (Jataí). Em sua trajetória IFG passou de uma instituição de cursos para trabalhadores para uma universidade

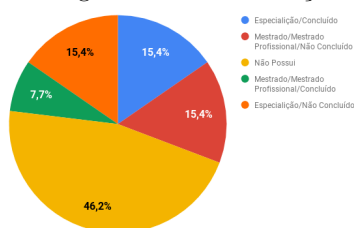
reconhecida nacionalmente e internacionalmente. O curso de Licenciatura em Matemática do IFG–Goiânia, tem por objetivo a formação de professores de Matemática para o Ensino Básico ou em níveis equivalentes[5]. Fazendo um prevê levantamento, dos 55 egressos onde 13 responderam a pesquisa. A pesquisa conseguiu levantar se esse egressos estão em sala de aula e conforme a figura a seguir, demonstra que o objetivo do curso esta dando fruto. Pela figura 1 podemos notar que os egressos estão indo para sala de aula.

Figura 1: Exerce a profissão de professor



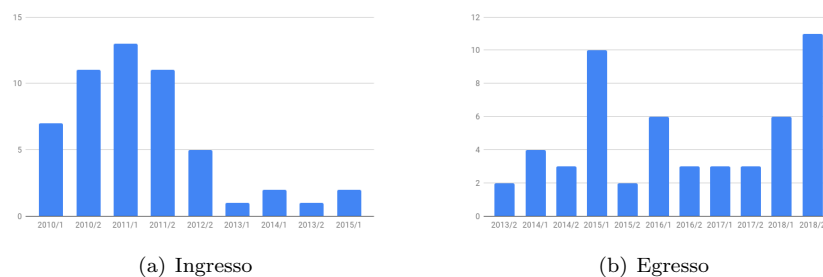
Outro dado importante da pesquisa é se os egressos estão se qualificando. Dos 13 que responderam a pesquisa ficou distribuídos assim:

Figura 2: Pós-Graduação



Conforme a figura acima os egresso estão buscando se qualificar na área de atuação.

Figura 3: Ingressos e Egressos



Fazendo uma comparação entre ingresso e egresso do curso de licenciatura em matemática, notamos uma grande evasão de aluno. Pós conforme a figura 3 notamos que dos 30 primeiros alunos do curso só 6 alunos formaram.

3 Considerações Finais

Com esse estudo identificamos que os egressos do Cursos de Licenciatura em Matemática do IFG–Goiânia estão se formando e indo direto para a sala de aula. Os egresso também estão se qualificando cada vez mas,

temos egresso com mestrado e logo teremos doutores na área de formação que se formou. Conseguimos identificar que desses egressos que estão em sala de aula, foram para o ensino básico e assim atingindo o objetivo do curso. Tirando a evasão do curso, que é normal, o curso de licenciatura em matemática ainda é visto um curso de doido ou um bicho de sete cabeça. Nos vestibulares o curso de licenciatura em matemática não grande índice de procura, as vezes no IFG tem que fazer um vestibular suplementar para completar o número de vagas oferecidos.

Referências

- [1] ARRUDA, C. P. *O que dizem os professores formadores sobre a identidade profissional, saberes e práticas: o caso da Licenciatura em Matemática do IFG*. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2018.
- [2] BRASIL. Decreto-Lei n. 4.127, de 25 de fev. de 1942. *Estabelece as bases de organização da rede federal de estabelecimentos de ensino industrial*. Rio de Janeiro, p. 2957-2957, fev. 1942. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-4127-25-fevereiro-1942-414123-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 10 jan. 2019.
- [3] BRASIL. Lei n. 3.552, de 16 de 1959. *Dispõe sobre nova organização escolar e administrativa dos estabelecimentos de ensino industrial do Ministério da Educação e Cultura, e dá outras providências*. Rio de Janeiro, fev. 1959. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L3552.htm. Acesso em: 10 jan. 2019.
- [4] BRASIL. Lei n. 11.892, 29 de dezembro de 2008. *Institui a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, cria os Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia, e dá outras providências*. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2008/Lei/L11892.htm. Acesso em: 25 mar. 2019.
- [5] BRASIL. IFG. *Projeto Pedagógico de Curso*, curso de licenciatura em matemática. Goiânia, 2009. Disponível em: <http://cursos.ifg.edu.br/arquivo/download/420>. Acesso em: 25 mar. 2019.
- [6] MANSO, E. A. *Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Goiás: a trajetória histórica do câmpus Goiânia*. 2016. 353 f. Tese (doutorado) (Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2016.
- [7] LULA, K. P. *A formação dos formadores de professores de matemática: um estudo na licenciatura em matemática do IFG Campus Goiânia*. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação, Goiânia, 2017.

A Trajetória Formativa de um Estudante da Escola Municipal Miguel Augusto de Faria: O Perfil dos Egressos dos Ex - Alunos da Turma de 2008-2011

GONÇALVES, Vinícius Almeida Louredo

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Licenciatura em Matemática, Câmpus Goiânia, IFG
vinicuslouredo1806@gmail.com

ARAÚJO, Maxwell Gonçalves

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Licenciatura em Matemática, Câmpus Goiânia, IFG
mxnte@yahoo.com.br

Março de 2019

1 Introdução

Este trabalho tem como intuito mostrar o que foi vivenciado no decorrer da vida acadêmica de um egresso da escola rural, relacionando-a com as experiências dos professores do IFG com a mesma origem escolar. Falamos dos obstáculos e dificuldades encontrados no caminho até a escola, incluindo as surpresas de uma realidade campesina. Sobre essas dificuldades enfrentadas, com relação à chegada dos alunos à escola rural, destacamos o transporte escolar e as intempéries do traslado. Pois muitas vezes existe o veículo, mas a falta de infraestrutura nas estradas impossibilita seu trânsito e, em consequência, impede a chegada dos estudantes até as redes de ensino.

Ao analisar as entrevistas, ficou evidenciado, também, outro obstáculo influenciador no ensino de matemática: a mesma não é ministrada por profissionais formados, deixando falhas na aprendizagem.

A pesquisa desenvolveu-se de forma qualitativa, com cunho bibliográfico, onde relatamos as próprias experiências do pesquisador, fortemente agregadas a uma indignação tremenda alicerçada na falta de atenção do governo para essas escolas. Há muito espera-se um melhor atendimento social às redes escolares de difícil acesso, de forma que a cultura não fosse modificada, com professores qualificados que saibam mediar o ensino de uma maneira mais correta a esses alunos que, possivelmente, entrarão em uma universidade.

Mostramos que o Estado e o Capitalismo usufruem do processo escolar, levando a uma descaracterização da escola rural, prejudicando vários aspectos tanto morais quanto culturais.

Nossa discussão será em torno de quatro pontos principais: quanto aos aspectos sócio-políticos: a baixa qualidade de vida na zona rural e a desvalorização da cultura rural; quanto à ação didático-pedagógica: currículo inadequado, geralmente estipulado por resoluções governamentais, ausência de orientação técnica e acompanhamento pedagógico e ausência de material de apoio escolar tanto para professores quanto para alunos; quanto às instalações físicas da unidade escolar: instalações precárias e, na maioria das vezes, sem condições para o trabalho pedagógico; quanto à política educacional rural: são raros os municípios que se dispõem a um trabalho mais aprofundado e eficiente, devido à ausência de recursos financeiros, humanos e materiais.

2 Desenvolvimento

A escola rural é diferenciada das escolas urbanas, devido à sua situação precária. As dificuldades são grandes para os educadores ministrarem suas aulas. Não se pode culpa-la por ser multisseriada. É precária porque existe uma série de ausências, inclusive a de uma proposta pedagógica para se trabalhar com as mesmas. No campo, ainda é preciso garantir que elas sejam organizadas, porque, se não fosse assim, muitas já teriam fechado e o problema seria ainda maior. Sua localização, em sua maioria, é de difícil acesso. O caminho percorrido é longo e os alunos, nem sempre, tem como chegar até as redes de ensino. Com tanta dificuldade, os professores tentam, de alguma forma, ensinar para os alunos suas respectivas matérias com esforço e dedicação.

Na trajetória da educação rural, o homem do campo foi concebido como exemplo de atraso e as políticas educacionais se organizavam em conformidade com os interesses capitalistas predominantes em cada conjuntura. Segundo Leite (2002), a orientação e interpretação de políticas educacionais, e da própria educação, têm por pressuposto o Estado Liberal Moderno e o Capitalismo Internacional, que se intercompõem e sustentam um processo social e histórico em que os objetivos primordiais são PODER e LUCRO.

A sociedade de estudantes camponeses e instituições de ensino do interior que o digam. Não é incomum depararmos com circunstâncias no dia a dia que configuram esta realidade. Às vezes, os educandos e educadores são sujeitos a verdadeiras aventuras no caminho até a escola, porque a condução utilizada não se encontra em uma boa conservação e os trajetos muitas vezes são quase inexploráveis. Quando chegam até as escolas, se deparam com infra- estruturas impróprias, professores incapazes e, se não bastasse tudo isso, a escola, na sua forma de ser, é a mesma da cidade, mesmo estando no campo. Nesse aspecto, Furtado (2008, p.15) discute que:

A qualidade do ensino ministrado no meio rural pode ser analisada do ponto de vista da precariedade da oferta: instalações, materiais didáticos e principalmente a formação precária e o acompanhamento quase inexistente dos professores em exercício; bem como se considerando o capital sócio-cultural em jogo, consequência do isolamento e desamparo histórico a que tem sido submetida à população do meio rural, o que é claramente visível pelo alto índice de analfabetismo (FURTADO, 2008, p.58).

Nas escolas rurais assegurar as vagas não é o suficiente para os indivíduos terem acesso ao estudo. É necessário possibilitar o transporte das crianças e dos adolescentes à escola, com estradas em condições de se trafegar. Segundo Houaiss (2005), acessibilidade é a facilidade de acesso. Infelizmente, chegar até a escola do campo é um grande desafio para seus estudantes e corpo docente. Faltam transporte e estradas adequadas e, tal fato, aumenta o abismo entre a qualidade da aprendizagem nas escolas rurais e nas urbanas.

A Escola Municipal Miguel Augusto de Faria, criada no ano de 1964, foi construída em um terreno doado por Benedito dos Santos. Está situada na Avenida Benedito Barbosa dos Santos, s/nº, distrito de Carmo do Cedro, município de Carmo do Rio Verde, em Goiás. Quando foi construída, recebeu o nome de Escola Carmo do Cedro e, apenas em 1987, por uma ocasião de homenagear a uma personalidade pioneira da região, passou a ter o nome que carrega até hoje.

Hoje, Carmo do Cedro conta com apenas esta rede de ensino: a Escola Municipal Benedito Barbosa dos Santos, contendo a Educação Infantil (Jardim II e III) e todo o Ensino Fundamental (I e II). A escola tem um excelente grupo de funcionários e todos os professores são licenciados. Tem oito salas de aula bem conservadas, sala de informática, secretária, cantina e banheiros masculino e feminino. A quadra de esportes utilizada não se localiza nas dependências da escola. Por isso, os alunos são levados pelo professor responsável até a Escola Municipal Miguel Augusto de Faria, que se encontra fechada pela falta de infraestrutura e de manutenção.

No desenvolvimento da pesquisa, resolvemos conversar com cada colega que estudou naquela escola rural na mesma época que o pesquisador, obtendo outros pontos de vista de como era o ensino que nos era repassado. Em cada relato, foi trazida uma abordagem expositiva e resumida do que aconteceu com a vida de cada um após a saída da escola campesina. Com isso, nosso objetivo principal foi mostrar que muitos deles estão, hoje, estudando em uma instituição de ensino superior. Os que não continuaram os estudos, também, fizeram um breve relato sobre o real motivo do por que não continuaram.

Com tantas dificuldades encontradas por essas pessoas, é comum encontrar alunos desinteressados. Talvez, seja por isso que o governo não se preocupe tanto com essa classe. Algumas alternativas para esses problemas seriam a criação de polos rurais de ensino que atendam essa comunidade, priorizando a formação de acordo com seu cotidiano, ônibus em melhor estado de conservação, que possibilitem segurança para os estudantes e estradas com melhor infraestrutura.

A educação municipal vem sofrendo mudanças no decorrer do tempo. A mais significativa foi à criação de polos, eliminando as escolas espalhadas pela zona rural que, em sua maioria, não correspondiam à qualidade necessária para um bom desenvolvimento dos educandos. As escolas do Carmo do Cedro foram ampliadas e melhoradas para atender a demanda da educação infantil e a todo o ensino fundamental. Mais isso não foi suficiente. O governo conseguiu fechar a Escola Municipal Miguel Augusto de Faria, transferindo todos os alunos para a Escola Municipal Benedito Barbosa dos Santos, onde existe uma melhor infraestrutura para suportar todos(as) os(as) estudantes.

3 Considerações Finais

Se o aluno deseja alcançar seus objetivos com o pensamento firme em seu futuro, ele conseguirá mesmo com as péssimas condições onde se encontram, hoje, diversos ambientes escolares públicos. Persistindo, sem nunca deixar de sonhar, consegui chegar onde tanto se almeja. Minha trajetória vem da escola rural, com muito orgulho por enfrentar todos esses obstáculos com perseverança, sem deixar-se abalar pelas dificuldades, sempre pensando no futuro. Quero dizer para meus alunos hoje, que voltei como professor para a mesma escola onde estudei, com a finalidade de provar que nada é impossível se tivermos vontade.

Assim, escrevendo minha história, consegui lembrar que nada foi fácil. A vida é feita de sonhos, os quais se transformam em objetivos que devemos alcançar.

Com tantas dificuldades, nunca pensei em desistir dos estudos e de continuar o trabalho no meio rural. A maioria dos meus colegas fizeram isso. Acredito que esse sofrimento me fortalece a cada dia, fazendo com que quebre barreiras, chegando aos lugares que eram sonhos.

Percebo que minha vida está, apenas, começando. Até o momento valeu todo esforço e vejo que estudar será uma rotina, se quiser conquistar novos caminhos, abrir novas portas, transformar-me em exemplo e referência para meus alunos. Em minha opinião, estas últimas são as principais metas de um verdadeiro professor.

Referências

[1] CARNEIRO, Maria José. *Ruralidade: novas identidades em construção*. Estudos Sociedade e Agricultura, nº 11, p. 53-75, out/1998. Disponível em: <http://bibliotecavirtual.clacso.org.ar/ar/libros/brasil/cpda/estudos/onze/zeze11.htm>. Acesso: jul/2008.

[2] FURTADO, Eliane Dayse Pontes. *Estudo sobre a educação para a população rural no Brasil*. Disponível em: http://redler.org/estudio_educacion_poblacion_rural_brasil.pdf. Acesso em: 25 Mar. 2019. Estudo sobre a educação para a população rural no Brasil. Proyecto FAO – UNESCO – DGCS Italia – CIDE – REDUC. p. 44 a 91.

[3] HOUAISS, Antônio. *Dicionário prático da língua portuguesa*. São Paulo: Melhoramentos 2005.

[4] LEITE, Sérgio Celani. *Escola Rural: urbanização e políticas educacionais*. São Paulo: Cortez, 2002 (Coleção Questão Da Nossa Época; v. 70).

Explorando a Matemática Financeira no Nível Médio

Carmo, Luar de Souza

Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia, IFG
luardocarmo2012@gmail.com

Souza, Simone Ariomar de

Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia, IFG
simone.souza@ifg.edu.br

Março de 2019

1 Introdução

Embora a Matemática Financeira contemple conhecimentos teóricos indispensáveis na formação da cidadania e inclusão social das pessoas, geralmente sua abrangência no ensino médio se restringe aos poucos conceitos financeiros, contemplados de forma aligeirada em sala de aula, tendo em vista a reduzida carga horária da disciplina de matemática.

2 Desenvolvimento

Frente a essa realidade, o presente projeto tem respectivamente como proposta e objetivo, construir uma visão crítica e estudar com mais propriedade os conceitos teóricos da matemática financeira, por meio da resolução de problemas contemplados em livros de matemática e concursos públicos. Portanto, o objeto de estudo a ser investigado pelo orientando do nível médio, será a variação do dinheiro no decorrer do tempo. Buscar-se-á respostas para as seguintes indagações: no contexto da Matemática Financeira, os conceitos teóricos conhecidos como razão, proporção, porcentagem, juros e descontos respectivamente, de que forma são definidos? Em que consistem? Para que servem? A resolução de problemas pode contribuir para o ensino-aprendizagem crítico da Matemática Financeira? Para o desenvolvimento dessa proposta, a metodologia empregada será a pesquisa bibliográfica fundamentada ora em literaturas recentes, ora em trabalhos científicos que tratam do assunto abordado.

3 Considerações Finais

Os resultados parciais da pesquisa apontam em direção ao estudo e apropriação da resolução inicial de problemas de matemática financeira, tais como:

- I. (VESTIBULAR IFG 2019 /1) São diversos os agentes etiológicos que levam a uma DST (doença sexualmente transmissível), como bactérias, vírus, fungos e protozoários resultando em distintas manifestações clínicas. Dentre as seguintes DSTs: gonorréia, sífilis, herpes genital, hepatite B, AIDS, tricomoníase, clamídia, cancro mole, HPV, linfogranuloma venéreo,
 - a) 70% são causadas por bactérias.
 - b) 50% são causadas por vírus.
 - c) 10% são causadas por protozoários.
 - d) 20% são causadas por protozoários.

- II. (Unificado – RJ) João vendeu dois rádios por preços iguais. Um deles foi vendido com lucro de 20% e o outro com prejuízo de 20% sobre o preço do custo. No total, em relação ao capital investido, João:
 - a) Lucrou 4%
 - b) Lucrou 2%
 - c) Perdeu 4%
 - d) Perdeu 2%
 - e) Não lucrou e nem perdeu

Por fim, o projeto em desenvolvimento tem demonstrado contribuir potencialmente para o desenvolvimento da educação financeira da orientanda e formação de sua cidadania, ensejando-lhe o incentivo e o gosto pela pesquisa científica em matemática.

Referências

IEZZI, G. et al. Matemática: volume único. São Paulo: Atual, 1997.

VIEIRA, L. C. *A matemática financeira no ensino médio e sua articulação com a cidadania*. 2010. 91f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2010.

Desafiando a Álgebra Superior no Nível Médio: As Equações Diofantinas Lineares e Suas Aplicações

Souza, Giovanna Ribeiro

Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia, IFG
giouvannari.souza@gmail.com

Souza, Simone Ariomar de

Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia, IFG
simone.souza@ifg.edu.br

Março de 2019

1 Introdução

Embora sejam extremamente úteis na resolução de problemas de matemática, as equações diofantinas lineares, comumente são abordadas, somente em alguns cursos superiores da área de exatas, e possivelmente na disciplina de “Álgebra I”.

No entanto, as equações diofantinas lineares com duas incógnitas, em particular, são perfeitamente passíveis de compreensão no ensino médio, por articular conceitos básicos e familiares.

Além disso, constituem um campo propício para a investigação matemática, com situações-problemas que permitem aplicar a teoria e desafiar os estudantes, favorecendo o desenvolvimento de novas habilidades.

2 Desenvolvimento

Este projeto de pesquisa tem como objeto de estudo e desafio a orientanda do ensino médio, a resolução de problemas de matemática por meio das equações diofantinas lineares com duas incógnitas. Buscar-se-á resposta para a seguinte indagação: em que consiste e para quê serve o estudo das equações diofantinas lineares de duas incógnitas?

A metodologia empregada será a pesquisa bibliográfica fundamentada ora em literatura recente, ora em livros tradicionalmente renomados que tratam do assunto abordado.

Para isso, serão explorados formalmente e com maior rigor matemático, assuntos anteriormente estudados, como por exemplo, múltiplo, divisor e máximo divisor comum entre dois números inteiros.

3 Considerações Finais

Os resultados parciais apontam na direção do estudo e apropriação das ações mentais indispensáveis na resolução de problemas envolvendo Equações diofantinas com duas incógnitas. Especificamente, foram abordados problemas de matemática, tais como:

- 1) A turma de formandos em Matemática pretende arrecadar 1510 reais numa festa. Os ingressos serão vendidos por 10 reais para alunos do curso e 20 reais para demais pessoas. Quantos ingressos deverão ser vendidos para a turma conseguir a arrecadação pretendida com um número mínimo de pessoas na festa?
- 2) Um parque de diversões cobra R\$ 1,00 a entrada de crianças e R\$3,00 a de adultos. Para que a arrecadação de um dia seja R\$112,00, qual o menor número de pessoas, entre adultos e crianças, que poderiam freqüentar o parque? Quantas crianças? Quantos adultos?

Por fim, o projeto em desenvolvimento tem demonstrado a viabilidade da abordagem de resolução de problemas envolvendo equações diofantinas no ensino médio, além de estimular em primeira instância, o desenvolvimento cognitivo da orientanda, conferindo-lhe maior grau de abstração matemática e autonomia intelectual.

Referências

SILVA. V. V. *NÚMEROS Construção e Propriedades*. 1ª edição. São Paulo. UFG, 2003.

Alguns Resultados Sobre as Publicações Relacionadas ao LEM no Banco de Dissertações e Teses da Capes nos Anos de 2012 a 2016

PERDIGÃO, Michelle Miranda Rodrigues

Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia, IFG
Michele.perdigao@hotmail.com

JESUS, Ana Cristina Gomes de

Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia, IFG
Ana.jesus@ifg.edu.br

Março de 2019

1 Introdução

Esse artigo é um recorte da pesquisa de TCC com o título: UM PANORAMA DAS PUBLICAÇÕES SOBRE O LABORATÓRIO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BANCO DE DISSERTAÇÕES E TESES DA CAPES DA ÁREA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Ressaltamos que um contato com o laboratório de matemática pode ter influências positivas na vida dos nossos professores e alunos, oportunizando novas experiências, tendo o LEM como um espaço vivo de construção de conhecimento matemático. Trazendo a relação professor, aluno e conhecimento mais dinâmico e uma interação mais humanística, horizontal. O LEMAT da UFG é um exemplo de LEM, de acordo com Varizo e Civardi (2011, p.43)

O LEMAT é um espaço no qual a comunidade de formadores de professores oferece ao licenciando oportunidade de vivenciar experiências de ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO através de projetos envolvendo comunidade educacional interna e externa à universidade, bem como socializar a produção acadêmica na área de Educação Matemática produzida por esses projetos de forma a contribuir com a relação entre a Universidade e a Sociedade e vice-versa'.

Nesse momento temos como objetivo expor algumas informações consideradas relevantes da coleta de dados feita tais como: a quantidade de publicações por ano, o total de publicações de instituições públicas e privadas, quantidade de publicações por região, tipo de trabalho (dissertação ou tese) e gênero dos autores com vistas a contribuir para uma reflexão mais ampla sobre o que se tem publicado ou se destacado mais, no âmbito de pesquisas sobre o LEM nos anos de 2012 á 2017.

2 Desenvolvimento

A composição do *corpus* deste artigo foi obtida partir das informações retiradas dos 21 trabalhos entre dissertações e teses no banco da CAPES nos anos de 2012 a 2017, recorte da pesquisa maior, já referenciada, sendo a mesma de natureza quali quantitativa, sendo um Estado da Arte. Para análise dos dados obtidos usamos a análise de conteúdo na perspectiva de Bardin (2009). Deste modo os resultados obtidos foram: No ano de 2014 produziu-se um total de 12 trabalhos publicados, sendo o maior numero de publicação dos anos já referidos, dessas publicações 19 foram em escolas públicas, sendo 11 pesquisas no ano de 2014, também foi possível coletar que dos 21 trabalhos 10 foram da região nordeste, um panorama feito entre teses e dissertações obtivemos 19 dissertações e apenas 2 teses. Por achar interessante e importante fez- se também um levantamento de dados sobre o gênero dos autores, mesmo percebendo que as mulheres estão participativas no âmbito ao que se refere a produção acadêmica na área de educação Matemática o gênero masculino ainda prevalece com um total não muito equidistante do gênero feminino de 12 publicações contra 9.

3 Considerações Finais

Autores como Lorenzato (2009), Varizo e Civardi (2011) defendem a implantação e a utilização do LEM como parte integrante da formação matemática do aluno e espaço de trabalho do professor de Matemática. Segundo os autores o laboratório de Educação Matemática (LEM) deve ser um espaço que contemple recursos didáticos, ou seja, materiais didáticos, mas

principalmente um local que favoreça o trabalho didático pedagógico do ensino da Matemática. Um local que propicie ao professor ambiente adequado para o preparo de suas aulas se tornando um recinto de reflexão e construção do conhecimento matemático e também um local onde os alunos possam ter aulas como vistas aos experimentos e conjecturas matemáticas.

De acordo Lorenzato (2006, p.7)

O LEM é um local da escola reservado preferencialmente não só para as aulas regulares de matemática, mas também para tirar dúvidas dos alunos, para os professores de matemática planejarem suas atividades, sejam elas aulas, exposições, olimpíadas, avaliações, entre outras coisas.

Por esse e outros motivos concluímos que o LEM é indispensável, ficando inegável a necessidade de se discutir em diferentes âmbitos de suas pesquisas e contribuições. Com vistas a colaborar para uma reflexão e formação profissional mais crítica do licenciando em Matemática é importante que mais pesquisas sejam realizadas, nos diferentes níveis: graduação e pós-graduação.

Referências

LORENZATO, S. (org). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. -2.ed.rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2009. (Coleção formação de professores).*

VARIZO, Z. da C. M.; CIVARDI, J. A. (organizadoras). *Olhares e reflexões acerca de concepções e práticas no laboratório de educação matemática. Curitiba, PR: CRV, 2011.*

Conjuntos Infinitos Enumeráveis e Não-Enumeráveis, Quantização da Energia e as Relações entre o Discreto e o Contínuo no Espectro Eletromagnético da Luz

Arantes, Gabriel Costa Vieira

Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Escola de Ciências Exatas e da Computação, ECEC PUC Goiás
gabrielhue28@gmail.com

Rodrigues, Clóves Gonçalves

Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Escola de Ciências Exatas e da Computação, ECEC PUC Goiás
cloves@pucgoias.edu.br

20 de Março de 2019

1 Introdução

Conjuntos infinitos podem ser classificados em enumeráveis e não-enumeráveis, de acordo com a sua natureza. O matemático Georg Cantor foi o primeiro a demonstrar que existem tipos diferentes de conjuntos infinitos, a partir do conhecido Método da Diagonal. Este fato culminou na teoria dos números cardinais, parte fundamental da teoria dos conjuntos. Dizemos que o conjunto X é infinito quando existe uma função injetiva $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. Isto significa que, se X é infinito, então $\text{card}(X) \geq \text{card}(\mathbb{N})$. Vale salientar que a função injetiva $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ é definida por indução em $n \in \mathbb{N}$. Para isso, tomamos inicialmente $f(1) \in X$. Então, para cada subconjunto não-vazio $A_k \subset X$, $k \in \mathbb{N}$, escolhemos $f(k) \in A_k$. Pela hipótese de indução, supomos definidos $f(1), f(2), \dots, f(n)$ e escrevemos $A_n = X - \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$, onde $A_n \subset X$ é não-vazio, pois X é infinito. Daí, basta tomar $f(n+1) \in A_n$. Isto completa a definição de $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. A injetividade de f decorre do fato de que, dados $m, n \in \mathbb{N}$, digamos com $m < n$, tem-se $f(m) \in \{f(1), f(2), \dots, f(n-1)\}$ e $f(n) \in X - \{f(1), f(2), \dots, f(n-1)\}$, donde inferimos $f(m) \neq f(n)$. Dizemos que um conjunto infinito X é enumerável quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. Isto significa que, se X é infinito e enumerável, então $\text{card}(X) = \text{card}(\mathbb{N})$. Noutras palavras, podemos afirmar que os conjuntos infinitos enumeráveis são, de certa forma, os “menores infinitos” que existem. Além disso, todo conjunto infinito enumerável possui uma enumeração do tipo $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Para construir esta enumeração, basta definir $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2, \dots, f(n) = x_n, \dots$ a partir da bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. Por conseguinte, dizemos

que um conjunto infinito X é não-enumerável quando não existe sobrejeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$, ou seja, $f(\mathbb{N}) \neq X$ para toda função $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. Isto significa que, se X é infinito e não-enumerável, então $\text{card}(X) > \text{card}(\mathbb{N})$. Todo conjunto não-enumerável contém um subconjunto infinito enumerável. A fim de verificar esta afirmação, vamos tomar o conjunto X não-enumerável. Logo, não existe sobrejeção $\mathbb{N} \rightarrow X$. Por definição, se X é não-enumerável, então X é infinito, logo deve existir uma função injetiva $h : \mathbb{N} \rightarrow X$. Segue-se daí que $\text{card}(X) > \text{card}(\mathbb{N})$ e $h(\mathbb{N}) \subset X$. Além disso, podemos obter uma bijeção $h|_{h(\mathbb{N})} : \mathbb{N} \rightarrow h(\mathbb{N})$ restringindo o contradomínio da função original $h : \mathbb{N} \rightarrow X$ ao subconjunto $h(\mathbb{N}) \subset X$. Portanto, se $h|_{h(\mathbb{N})} : \mathbb{N} \rightarrow h(\mathbb{N})$ é uma bijeção, então $\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card} h(\mathbb{N})$, isto é, $\mathbb{N} \equiv h(\mathbb{N})$. Consequentemente, $h(\mathbb{N}) \subset X$ é infinito enumerável.

2 Desenvolvimento

No ano 1900, o físico alemão Max Planck publicou sua teoria sobre a quantização da energia luminosa, numa tentativa de explicar o problema da Radiação do Corpo Negro, que estava em aberto desde 1860 devido às observações experimentais realizadas por Gustav Kirchoff. A famosa Equação de Planck foi capaz de descrever, com êxito, o fenômeno da emissão do Corpo Negro, através de uma teoria completamente inovadora. Em 1905, Einstein propôs a existência dos fótons, pequenos “pacotes” de energia que constituem a luz. Assim, consolidou-se a interpretação corpuscular da luz, que desde então não foi mais estudada apenas como onda. Esta interpretação resultou na dualidade onda-partícula do espectro eletromagnético, abrindo as portas para o mundo quântico. Mais tarde, dois importantes experimentos foram capazes de comprovar que o elétron possui o mesmo comportamento dual da luz. Estamos falando do Espalhamento Compton e da Difração de Elétrons. A Equação de Planck sugere que a radiação eletromagnética emite fótons em quantidades discretas. Noutras palavras, os “pacotes” de energia luminosa são emitidos em múltiplos de números naturais. Com base neste pressuposto, temos que a Equação de Planck é dada por $E = n \cdot (h\nu)$, $n \in \mathbb{N}$, onde E é a energia de cada fóton emitido, h é a constante de Planck ($h = 6,63 \times 10^{-34}$ J.s) e ν é a frequência da radiação eletromagnética. Fixando a frequência ν de um feixe luminoso, consideremos o conjunto $\Gamma = \{ E = n \cdot (h\nu) ; n \in \mathbb{N} \}$ de todas as energias permitidas para os fótons emitidos por esta radiação. Evidentemente, este conjunto é infinito, pois para cada múltiplo natural $n = 1, 2, 3, \dots$ associa-se um valor de energia. A fim de provar que o conjunto $\Gamma(E)$ é enumerável, basta definir a bijeção $\mathcal{F} : \mathbb{N} \rightarrow \Gamma(E)$ dada por $\mathcal{F}(n) = n \cdot (h\nu)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto demonstra matematicamente que os fenômenos quânticos que cumprem a Equação de Planck são discretos. É interessante notar que, no campo de estudo da Física,

os fenômenos contínuos sempre são associados a conjuntos não-enumeráveis, enquanto que os fenômenos discretos são associados a conjuntos infinitos enumeráveis. Isto decorre diretamente da existência (ou não) de uma restrição destes fenômenos ao conjunto \mathbb{N} dos números naturais. Observe que o conjunto $\Gamma = \{ E = n \cdot (h\nu) ; n \in \mathbb{N} \}$ é enumerável porque descreve as energias permitidas para os fótons de uma radiação eletromagnética específica, cuja frequência ν é fixa. Um exemplo seria um feixe de luz monocromático. Se, por outro lado, considerarmos o conjunto $Y = \{ E = n \cdot (h\nu) ; n \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{R} \}$ cujos elementos são todas as energias permitidas para os fótons emitidos por qualquer radiação do espectro eletromagnético, verificamos que $Y(E)$ é um conjunto não-enumerável, pois existe uma bijeção clara $\mathcal{F} : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow Y(E)$ dada por $\mathcal{F}(n, \nu) = n \cdot (h\nu)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\nu \in \mathbb{R}$, onde o produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ é evidentemente não-enumerável. Portanto, a natureza não-enumerável do conjunto $Y(E)$ nos permite inferir que o espectro eletromagnético em sua totalidade é contínuo, o que condiz com a teoria da Física sobre a luz.

3 Considerações Finais

A linguagem de conjuntos é uma ferramenta poderosa no estudo dos fenômenos naturais. Com as noções de conjunto infinito e enumerabilidade, fomos capazes de (re)interpretar as relações existentes entre o discreto e o contínuo no estudo do espectro eletromagnético da luz. Pela Equação de Planck, temos que toda radiação cuja frequência ν é fixa, por exemplo, um feixe de luz monocromática do espectro visível, emite fótons em quantidades discretas, logo o conjunto de todas as energias permitidas para estes fótons é enumerável, pois existirá uma bijeção óbvia com o conjunto \mathbb{N} dos números naturais, consequência da própria definição matemática da Equação de Planck, dada por $E = n \cdot (h\nu)$, $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, o conjunto de todas as energias permitidas pela Equação de Planck para os fótons emitidos por quaisquer radiações do espectro eletromagnético caracteriza um conjunto não-enumerável, pois então a frequência $\nu \in \mathbb{R}$ é variável e passamos a ter uma bijeção com o produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Em suma, podemos concluir que o conjunto das energias permitidas para o espectro eletromagnético é não-enumerável, ou seja, o espectro eletromagnético da luz em sua totalidade é contínuo, ao passo que o conjunto das energias permitidas para cada radiação individual que compõe o espectro eletromagnético é enumerável, ou seja, essas radiações individuais são discretas. Esta conclusão é um bom exemplo para ilustrar que todo conjunto não-enumerável possui um subconjunto infinito enumerável, fato que demonstramos na introdução. Com isso, percebemos que os teoremas estudados em matemática nem sempre são puramente abstratos, mas também podem refletir a realidade dos fenômenos naturais.

Referências

LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise, Vol. 1. Projeto Euclides*. 14ª Edição. 432 páginas. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. 2017.

NOVAES, Gilmar Pires. *Introdução à Teoria dos Conjuntos*. Editora SBM. 1ª Edição. 460 páginas. Rio de Janeiro. 2018.

EISBERG & RESNICK. *Física Quântica: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*. ELSEVIER. 45ª Tiragem. 35ª Reimpressão. 928 páginas. Rio de Janeiro. 1979.

TIPLER & LLEWELLYN. *Física Moderna*. Editora LTC. 6ª Edição. 487 páginas. Rio de Janeiro. 2017.

Modelo de combustão para um meio poroso com n camadas*

Batista, Marcos Roberto

{Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia}, {IFG}

marcos.batista@ifg.edu.br

Da Mota, Jesus Carlos

{Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás}, {UFG}

jesus@ufg.br

7 de Março de 2019

1 Introdução

Um dos métodos de recuperação de petróleo de um reservatório petrolífero é a combustão in-situ. Muitos reservatórios petrolíferos são constituídos por várias camadas de rocha porosa. Soluções de modelos matemáticos que governam o escoamento são importantes para o estudo da viabilidade de recuperação de poços que já pararam de produzir por processos naturais.

O modelo resultante deste trabalho é constituído por um sistema unidimensional de reação-difusão-convecção, com n equações diferenciais parciais (EDPs) parabólicas, representando a massa de um combustível sólido e a conservação de energia nas camadas, acoplado com n equações diferenciais ordinárias (EDOs), designando as taxas de reação de combustão.

Como resultado na área de matemática, o problema de valor inicial e de contorno estudado certamente trará uma contribuição relevante na área de EDPs parabólicas. Os problemas para sistemas de n equações de reação-difusão-convecção acoplado com n EDOs, onde o acoplamento se dá tanto nas funções de reação quanto nos coeficientes do operador diferencial associado são pouco conhecidos na literatura. Na teoria clássica, o acoplamento aparece somente nas funções de reação, como por exemplo em [5].

2 Desenvolvimento

Os principais objetivos deste trabalho são:

- Apresentar um modelo matemático para estudar a dinâmica de frentes de combustão em meios porosos. O modelo é constituído por um sistema não linear de equações diferenciais parciais (EDPs) do tipo parabólico, acoplado com um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs).

O sistema governa o escoamento de gás e óleo através de um meio poroso, levando-se em conta a presença de uma frente de combustão propagando-se através do meio. Será considerado que o meio poroso é constituído de várias camadas com propriedades físicas distintas como, porosidade da rocha, capacidade térmica, difusividade térmica, etc. Para a análise matemática, o modelo é escrito na forma adimensional.

- Resolver o problema de valor inicial e de contorno para o sistema acoplado (existência e unicidade de solução), com dados iniciais e de contorno num espaço adequado de funções, supondo as funções de concentração conhecidas.

O modelo matemático foi obtido a partir de modelos já existentes na literatura, como em [3], onde foi deduzido o modelo para duas camadas. A solução do problema de Cauchy para esse modelo, supondo as concentrações de combustível como funções conhecidas, foi estudado em [1]. E para o caso geral com as temperaturas e concentrações como incógnitas foi estudado em [2].

A idéia no presente trabalho é generalizar o modelo de duas camadas para o modelo com um número qualquer de camadas, acrescentando condições de contorno, obtendo o sistema acoplado referido acima. A existência e unicidade da solução, com a hipótese das concentrações de combustível conhecidas, serão obtidas utilizando o Método Iterativo Monótono, que pode ser encontrado com maiores detalhes em [4].

*Este trabalho conta com apoio financeiro da FAPEG

3 Considerações Finais

Do ponto de vista científico na área de Matemática, os resultados concretos esperados estão relacionados a encontrar condições para a existência e unicidade de solução para o problema estudado. Acredita-se que os resultados obtidos terão impactos positivos, particularmente na área de EDPs Parabólicas Aplicadas, uma vez que problemas onde o acoplamento se dá tanto nas funções de reação quanto nos coeficientes do operador associado são pouco conhecidos na literatura.

Referências

- [1] DA MOTA, J.C.; SANTOS, M.M. An application of the monotone iterative method to a combustion problem in porous media. *Nonlinear Analysis: Real World Application*, v. 12, n. 2, p. 1192-1201, 2011.
- [2] DA MOTA, J.C.; SANTOS, M.M.; SANTOS, R.A. The cauchy problem for a combustion model in a porous medium with two layers. *Monatshefte für Mathematik*, v. 184, n. 4, 2017. DOI 10.1007/s00605-017-1114-2
- [3] DA MOTA, J.C.; SCHECTER, S. Combustion fronts in a porous medium with two layers. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, v. 18, n. 3, p. 615-665, 2006.
- [4] PAO, C.V. *Nonlinear parabolic and elliptic equations*. Plenum Press: New York and London, 1992.
- [5] ROTHE, F. *Global solutions of reaction-diffusion systems. Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag: New York, 1984.

Teoria dos Números, Números Primos e Números Irracionais

Fernando Sacramento Reis Júnior

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, IFG

fernandojr.a7x@gmail.com

23 de Março de 2019

1 Introdução

Aqui será tratado um pouco sobre o estudo da Teoria dos Números e Teoria dos Números Irracionais.

O estudo das propriedades dos números naturais é o objetivo central da Teoria dos Números. São três os principais ramos em que se divide a Teoria dos Números: Teoria Elementar, Teoria Analítica e Teoria Algébrica.

A Teoria dos Números Irracionais busca estudar as propriedades de números irracionais. Essa área tem um estudo mais aprofundado na parte de Teoria de Números Transcendentes.

2 Teoria dos Números

Teoria dos números é o ramo da Matemática Pura que estuda propriedades de números naturais.

2.1 O Princípio da Boa Ordenação (PBO);

Todo subconjunto dos Naturais não-vazio contém um elemento mínimo.

Seja $S \subset \mathbb{N}$ e $S \neq \emptyset$, $\exists n_0 \in S$ tal que $n_0 < n \forall n \in S$.

2.2 Princípio de Indução Matemática;

Seja S um subconjunto dos Naturais. Se S possui as seguintes propriedades:

- i. $1 \in S$.
- ii. $k + 1 \in S$ sempre que $k \in S$ então S contém todos os Naturais.

3 Números Primos e Irracionais

3.1 Os Números Primos;

São números que possuem somente dois divisores, o 1 e ele mesmo.

A. *O Teorema Fundamental da Aritmética;*

Todo Natural maior que 1 pode ser representado como um produto de fatores de potências de primos.

Seja um inteiro $n > 1$ e p_i um primo, então $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_i^{a_i}$.

B. *O Teorema de Euclides;*

A sequência dos números primos é infinita.

C. *Conjectura de Goldbach e Teorema dos Números Primos;*

Todo número par maior que 2 pode ser escrito como soma de dois números primos.

Seja $\pi(n)$ a função contagem de primos, que conta a quantidade de primos de 1 até n , de acordo com o Teorema dos Números Primos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n/\ln(n)} = 1$$

3.2 Os Números Irracionais:

Os números irracionais são números que não podem ser escritos em forma de fração.

Seja $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, n é irracional se, e somente se, $n \neq \frac{p}{q}$.

3.3 \sqrt{p} (com p primo), π , e (Número de Euler) como números irracionais:

a) Demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e \sqrt{p} ;

Suponha que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$ e $\text{mdc}(p,q) = 1$

$2 = p^2/q^2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$; Se p^2 é par, logo p também é par e $p = 2k$

$(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$; q^2 é par, logo q também é par, se p e q são pares então $\text{mmc}(p,q) \neq 1$ o que é um absurdo. Logo $\sqrt{2}$ é irracional.

b) Outros números irracionais;

O número de euler (e) $\cong 2,7182818...$

O número $\pi \cong 3,14159265358979...$

3.4 Um pouco de transcendência:

Números transcendentos são números que não são raízes de nenhuma equação polinômial de coeficientes racionais.

Seja $\beta \in \mathbb{C}$, $\beta = a+bi$ onde $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$ e $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ se $f(\beta) \neq 0$ $\forall a_n = p/q$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$ então β é Transcendente.

c) Alguns números transcendentes;

Os números π e e como números transcendentos.

4 Considerações Finais

No início temos a apresentação da Teoria dos Números e suas divisões, dentro da Teoria dos números conhecemos ferramentas matemática que nos ajudam a resolver diversos problemas, e muita das vezes é utilizado o próprio PBO, e essas ferramentas são de fundamental importância para o estudo da Teoria dos Números Transcendentes pois são com essas ferramentas que utilizamos para desenvolver a demonstração se um número é irracional ou não, ou se é transcendente ou não.

Referências

- [1] SANTOS, José Plínio de Oliveira. *Introdução à teoria dos números*. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [2] MARQUES, Diego. *Teoria dos números Transcendentes*. 7 ed. Rio de Janeiro: SBM

Estudo da Relação das Formas Algébricas e Geométricas das Superfícies Quádricas com Auxílio Computacional

FERREIRA, Francilene Cristina Oliveira*
DE OLIVEIRA, Michele Mariane*
SOUSA, Wilker Cássio*
ROSA, Marília Clara do Vale Mendes*
DA FONSECA, Regina Célia Bueno*

*{Instituto Federal de Goiás, Departamento de Áreas Acadêmicas II, Campus Goiânia}, {IFG}
redafonseca@gmail.com

8 de Abril de 2019

Resumo

A modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. O modelo matemático é o conjunto de símbolos e relações que procuram traduzir, de alguma forma, um problema de situação real. As disciplinas Geometria Analítica e os Cálculos Diferencial e Integral (II e III) procuram expressar a modelagem matemática das equações que descrevem as diferentes formas algébricas dos sólidos e das superfícies quádricas centradas e não centradas. Uma quádrlica é o conjunto de pontos no espaço \mathbb{R}^3 , cujas coordenadas cartesianas, verificam uma equação do 2º grau, a três variáveis. Esferas, parabolóides, elipsóides, hiperbolóides, cilindros (2º grau) e cones (2º grau) constituem as mais conhecidas superfícies quádricas. As novas tecnologias dos softwares matemáticos auxiliam essas disciplinas dando ênfase na visualização e representação geométrica desses sólidos e superfícies quádricas, bem como, facilitando o entendimento da relação entre suas definições algébricas. O objetivo principal desta pesquisa foi identificar e modelar as equações na forma canônica das superfícies quádricas, e para relacionar suas formas canônicas às formas geométricas utiliza-se o software de licença livre, o GeoGebra, que auxiliará na análise das propriedades que as caracterizam.

Palavras-Chave: Superfícies quádricas, Formas canônicas, Formas geométricas, Software GeoGebra, Software Maple.

1 Introdução

As dificuldades enfrentadas no ensino-aprendizagem da Geometria Analítica e do Cálculo Diferencial e Integral (II e III) se devem a necessidade de entender a descrição algébrica das equações que descrevem as retas, planos, sólidos e superfícies, em particular, das superfícies quádricas (centradas e não centradas) e cilíndricas. O recurso computacional de software matemático, podem auxiliar na interpretação visual geométrica e fazer a relação dos parâmetros apresentados em suas definições. Em geral, as superfícies quádricas são definidas por uma equação geral do 2º grau nas variáveis x, y, z , em que sua equação implícita, $F(x, y, z) = 0$, em que

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j, \quad (1)$$

onde $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ são números reais, sendo a, b, c não são todos nulos. O subconjunto $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / F(x, y, z) = 0\}$ que satisfaz a Eq.(1), representa uma superfície quádrlica [1, 2, 3].

A pesquisa restringiu ao caso particular das superfícies que satisfazem o seguinte tipo de equação

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + gx + hy + iz + j = 0, \quad (2)$$

onde a, b, c não são simultaneamente nulas [3]. Usando artifícios algébricos matemático na Eq.(2), obtêm-se os dois tipos de equações quádricas: as centradas e não centradas.

2 Desenvolvimento

Os softwares Maple e GeoGebra apoiaram o desenvolvimento do estudo. A seguir, mostramos os procedimentos do estudo na pesquisa de cada superfície quádrica. Iniciamos com as superfícies quádricas centradas seguidas das não centradas.

2.1 Quádricas Centradas

As superfícies quádricas centradas são definidas na forma algébrica por,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0, \quad (3)$$

onde $A, B, C, J \in \mathbb{R}$, sendo A, B, C são não nulos [1, 2, 5]. Por manipulações algébricas na Eq.(3), obtêm-se a forma canônica:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (4)$$

onde a, b, c números reais positivos não nulos. Das possíveis combinações de sinais dos coeficientes dos termos das variáveis x, y, z da Eq.(4), obtêm-se as três superfícies quádricas centradas: o Elipsóide, o Hiperbolóide de uma folha e o Hiperbolóide de duas folhas, sendo que estas são diferenciadas pelos sinais iguais e ou alternados dos coeficientes dos termos do 2^o grau nas variáveis x, y, z [2, 5].

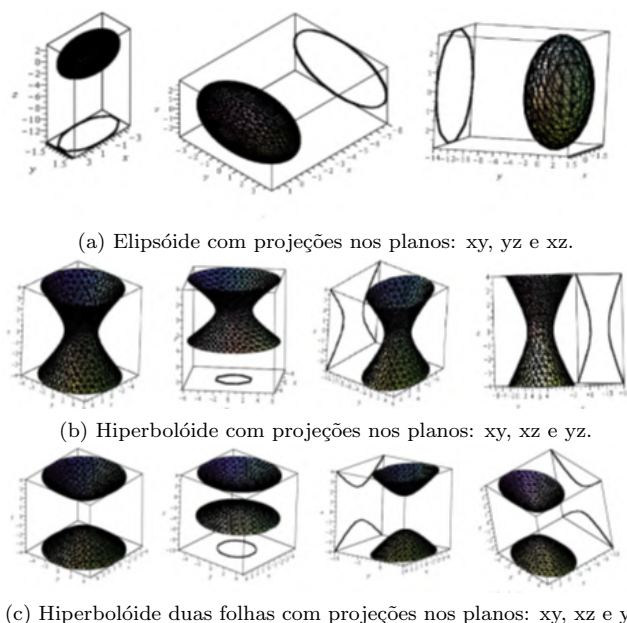


Figura 1: Superfícies Quádricas: Elipsóide, Hiperbolóide e Hiperbolóide de duas folhas. Fonte: Autores.

A partir da combinação dos sinais da Eq.(4), obtêm-se as três superfícies quádricas centradas: três sinais positivos, o Elipsóide; dois sinais positivos e um contrário, o Hiperbolóide de uma folha; e dois sinais negativos e um contrário, o Hiperbolóide de duas folhas [1, 2, 5]. A Figura 1 mostram, respectivamente, as três superfícies quádricas centradas em seus eixos de simetria, e as curvas cônicas projetadas nas três seções planas, obtidos no Maple [4].

2.2 Quádricas não Centradas

Por definição, o parabolóide elíptico é um conjunto de pontos no sistema de coordenadas representado pelas equações nas formas canônicas dadas nas Eq. (5). E se não tiverem nenhum dos coeficientes dos termos do 2º sinais iguais, então as Eq.(6) representam suas formas canônicas ao longo dos eixos com centro na origem [3, 4].

$$\pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = ax, \quad \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = by, \quad \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz. \quad (5)$$

Quando os termos à esquerda da igualdade da Eq.(5), possuem o mesmo sinal, obtemos a quádrlica não centrada denominada por parabolóide elíptico ao longo de seus eixos de simetria, ou seja, podemos obter três tipos de parabolóide elíptico descritas na Eq. (6):

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad (6)$$

A Figura 2 mostra o parabolóide hiperbólico ao longo do eixo z que foi plotada com o uso do software GeoGebra. E a Figura (3a) e a Figura (3b) mostram os parabolóides elípticos plotado ao longo do

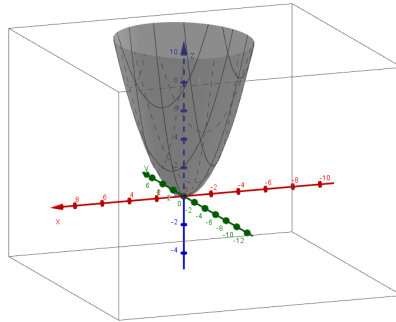


Figura 2: Parabolóide Elíptico ao longo do eixo z no Software GeoGebra definido pela função na forma implícita $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$. Fonte: Autores.

eixo x e ao longo do eixo y, respectivamente. E mais, mostram suas curvas canônicas (parábola e elipse) projetadas nos planos coordenados, e obtidas usando o software Maple.

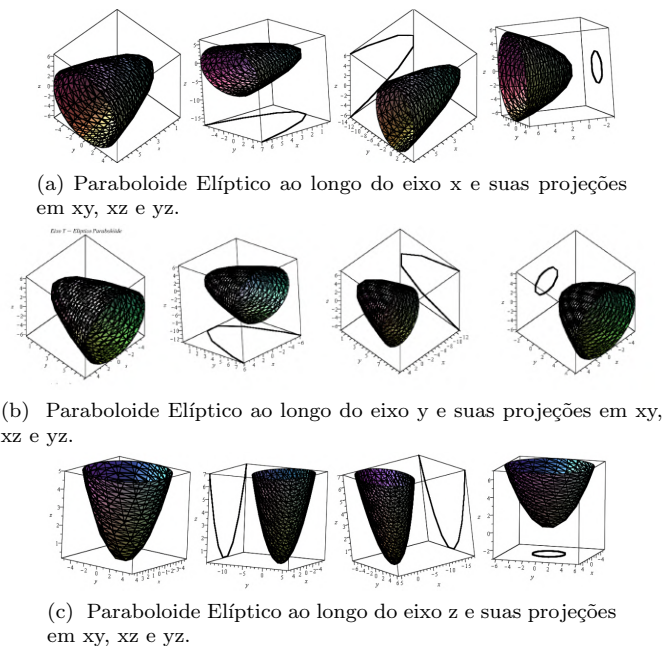


Figura 3: Superfícies Não Quádricas: Parabolóide Elíptico e Parabolóide Hiperbólico. Fonte: Autores.

Com relação ao estudo das curvas cônicas projetada nos planos coordenados, as curvas obtidas são a elipse e a hipérbole, cujas posições dependem do eixo de simetria escolhida para plotar a superfície quádrlica não centrada. As projeções da superfície quádrlica são mostradas nas Figura (3a), Figura (3b) e Figura (3c), que mostram também, as curvas cônicas nos planos coordenados, sendo em dois planos, a curva da parábola, e no terceiro plano, uma elipse, plotadas com o auxílio do software Maple, e usando o carregamento da biblioteca *Student:-MultivariateCalculus* e do comando *plots* para gerar os gráficos. E para obter as superfícies quádrlicas não centradas e suas curvas canônicas nos planos coordenados, usamos o comando *implicitplot3d* no Maple. Um detalhe que pode ser observado na Figura (3a) e Figura (3b), as posições das curvas nos planos coordenados mudam conforme o eixo de simetria da superfície quádrlica não centrada.

Por outro lado, quando os termos à esquerda da igualdade das Eq. (5) possuem sinais contrários, obtemos a superfície quádrlica não centrada denominada por parabolóide hiperbólico, como mostra a Figura (4).

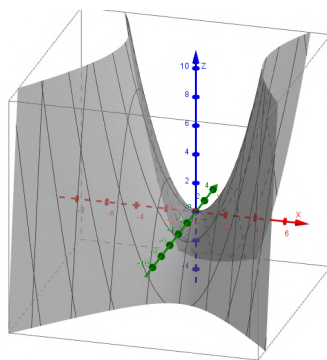


Figura 4: Parabolóide Hiperbólico ao longo do eixo z no Software GeoGebra definido pela função na forma implícita $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$. Fonte: Autores.

Por definição, o parabolóide hiperbólico é um conjunto de pontos no sistema de coordenadas representado pelas equações na forma canônica se nas Eq. (5), e os coeficientes dos termos do 2^o tiverem sinais contrários, então as Eq. (7) representam suas formas canônicas ao longo dos eixos com centro na origem [3, 4, 5].

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz, \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = by, \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = ax. \quad (7)$$

Com relação ao estudo das curvas cônicas projetada nos planos coordenados, as curvas obtidas são a elipse e a hipérbole, cujas posições dependem do eixo de simetria escolhida para plotar a superfície quádrlica não centrada. As projeções da superfície quádrlica são mostradas na Figura (5), que mostram também, as curvas cônicas nos planos coordenados, sendo em dois planos, a curva da parábola, e no terceiro plano, uma hipérbole, que são obtidas quando alternamos o eixo de projeção do parabolóide hiperbólico.

Podemos observar que, a Eq. (7) sofre influência da definição de hipérbole que é um conjunto de pontos, cuja a diferença das distâncias de cada um desses pontos, aos focos é constante.

Outro detalhe que pode ser observado na Figura (6), é que posições das curvas nos planos coordenados mudam conforme o eixo de simetria da superfície quádrlica não centrada. As sobreposições das curvas, a partir de alternância nas variáveis, revelaram os cortes com os planos que exemplificam a formação de duas parábolas e uma hipérbole.

3 Considerações Finais

A mostrou a importância da modelagem matemática das equações que descrevem as superfícies quadráticas (centradas e não centradas), bem como, os traçados de suas curvas canônicas nas secções planas, denominados como planos coordenados, que foram obtidos por meio de "cortes" planos paralelos aos eixos coordenados.

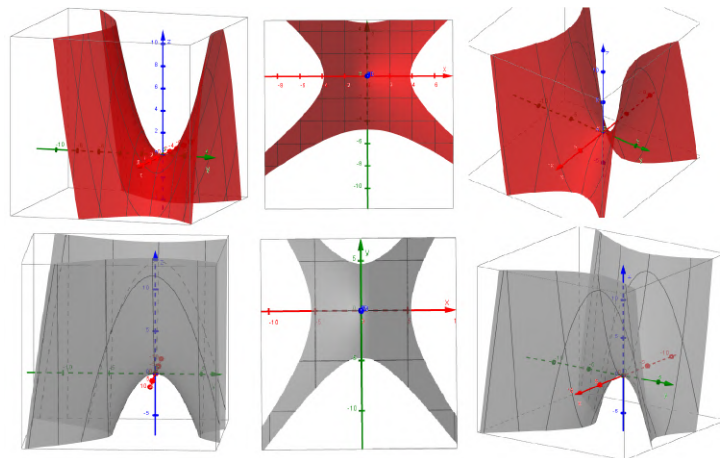


Figura 5: Parabolóides hiperbólicos ao longo do eixo z, plotado com o software GeoGebra. Fonte: Autores.

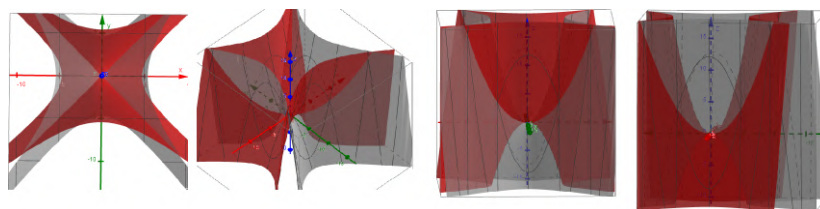


Figura 6: Sobreposição de $F(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{3}$ e $G(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3}$ com auxílio do Software GeoGebra. Fonte: Autores.

Identificar e modelar as equações na forma canônica das superfícies quádricas, e para relacionar suas formas canônicas às formas geométricas utiliza-se o software de licença livre, o GeoGebra, que auxiliará na análise das propriedades que as caracterizam.

Os softwares GeoGebra e Maple confirmaram suas funcionalidades e potencialidades como recursos didáticos computacionais.

Referências

- [1] EDWARDS, C. H. Jr.; PENNY, D. E. *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 2. 4ª Edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 1999.
- [2] MUNEM, M. A.; FOULIS D. J. *Cálculo*, Volume 2. Editora Guanabara. Rio de Janeiro, 2008.
- [3] RINCON, L. F. *Designing Dynamic and Interactive Applications Using GeoGebra Software in the Mathematics Curriculum*. Kean University. Mathematics, Kean University, 2009.
- [4] NAGAMINE, A. *Um Curso de Maple*. Universidade Estadual de Santa Cruz. Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas. 2001.
- [5] STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Geometria Analítica*. 5ª Edição. Editora Cengage Learning. São Paulo, 2008.

Equações Diferenciais : Uma Modelagem Matemática Aplicada em Circuitos Elétricos nas Engenharias

SOUSA, Wilker Cássio

{Instituto Federal de Goiás, Departamento de Áreas Acadêmicas II, Campus Goiânia}, {IFG}

eng.wilker@yahoo.com

DA FONSECA, Regina Célia Bueno

{Instituto Federal de Goiás, Departamento de Áreas Acadêmicas II, Campus Goiânia}, {IFG}

redafonseca@gmail.com

7 de Abril de 2019

Resumo

Este trabalho consiste em relacionar a importância do estudo de equações diferenciais lineares da Matemática aplicadas na resolução de problemas da Engenharia, que busca modelar matematicamente circuitos elétricos. É realizada uma analogia a partir das leis físicas como as leis de Kirchoff e outras, que descrevem o comportamento de um problema específico, em particular, circuitos em série e em paralelo do Eletromagnetismo, usando os procedimentos matemáticos adequados a cada problema, para obter a equação diferencial que o representa. Tais equações são, portanto, fundamentais para descrever o comportamento dos parâmetros que envolvem os circuitos elétricos, como a corrente e tensão. Dependendo do problema de interesse, a modelagem pode ser feita de forma analítica ou de forma computacional. Assim, o objetivo desta pesquisa é mostrar e destacar a importância dessas equações diferenciais como ferramentas matemáticas para interpretar e resolver problemas que envolvem circuitos elétricos na Engenharia.

Palavras-Chave: Equações diferenciais, Modelagem matemática, Circuitos elétricos.

1 Introdução

Uma expressão matemática é denominada equação diferencial (ED) quando a equação envolve derivadas de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, sendo respectivamente, são classificadas pelo tipo: equação diferencial ordinária (EDO) ou equação diferencial parcial (EDP); pela ordem e pela linearidade (homogêneas ou não homogêneas). Tais ED possibilitam a descrição matemática de várias propriedades de fenômenos físicos [1].

Um problema específico, em particular, circuitos em série e em paralelo do Eletromagnetismo, usando os procedimentos matemáticos e físicos adequados na solução, obtém-se a equação diferencial cuja solução geral descreve os comportamentos dos parâmetros que envolvem os circuitos elétricos, como a corrente e tensão [2].

Nesta proposta, restringimos à modelagem matemática das equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas (EDLH) de primeira ordem, e equações diferenciais ordinárias lineares não-homogêneas (EDLN-H) de segunda ordem, aplicadas em circuitos elétricos nas engenharias [3].

1.1 Elementos de um Circuito Elétrico

Os circuitos elétricos são compostos por componentes elétricos, os capacitores, indutores e resistores. O capacitor é um dispositivo que armazena energia na forma de campo elétrico; o indutor é um dispositivo que armazena energia na forma de campo magnético e o resistor é um dispositivo capaz de dissipar energia na forma de calor. A Figura ?? mostra os símbolos dos elementos armazenadores de energia de um circuito elétrico [1].

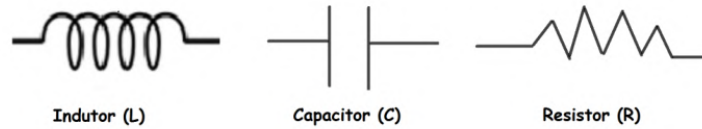


Figura 1: Símbolos dos elementos armazenadores de energia de um circuito elétrico. Fonte:

Os circuitos elétricos são um conjunto de componentes elétricos que juntos formam um circuito fechado onde há a passagem de uma corrente. Esses componentes ou elementos podem ser organizados em série para formar um circuito em série ou em paralelo. No circuito em série uma mesma corrente passa por todos os elementos e no circuito em paralelo cada componente possui um valor diferente de corrente que passa sobre ele. Em um circuito fechado a soma algébrica das tensões em qualquer instante é igual a zero e a soma algébrica das correntes em um nó em qualquer instante é, também, igual a zero. Estas são, respectivamente, as Lei de Kirchhoff para as tensões (LKT) e Lei de Kirchhoff para as correntes (LKC).

Existem circuitos formado por: (i) um resistor e um indutor chamado de circuito RL, modelado matematicamente por EDLH de primeira ordem; (ii) um indutor e um capacitor chamado de circuito LC; (iii) um resistor, um indutor e um capacitor chamado de circuito RLC. Os circuitos LC e RLC são modelados matematicamente por EDLN-H de segunda ordem [3].

2 Desenvolvimento

Os circuitos elétricos podem ser modelados pelas Leis de Kirchhoff (LKC e LKT). A tensão (V) e a corrente (I) sobre cada componente, resistor (R), indutor (L) e capacitor (C), e dada a condição inicial nula ($v(t_0) = v_0$), obtemos:

$$V_R(t) = Ri(t) \quad V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad V_C(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t)dt + v(t_0) \quad (1)$$

$$I_R(t) = \frac{v(t)}{R} \quad I_L(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t)dt + i(t_0) \quad I_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (2)$$

onde $i(t)$ e $v(t)$ são, respectivamente, a corrente e a tensão, no instante t e V_R , V_L , V_C são as tensões e I_R , I_L , I_C as correntes sobre os elementos do circuito elétrico [4].

Dessa forma, vamos generalizar o estudo para os circuitos RLC, como mostrados nas Figura 3 e Figura 4, respectivamente:

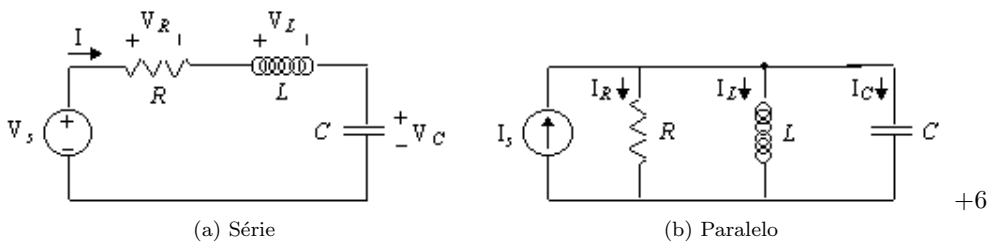


Figura 2: Circuito RLC com tensão V_S contínua. Fonte:

No **circuito elétrico em série** (Figura 3) podemos utilizar a Lei de Kirchhoff das tensões (LKT) para obtermos a EDL do circuito RLC em série, ou seja,

$$V_S(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t), \quad t \geq 0 \quad (3)$$

onde V_S representa a tensão total contínua que é dada por uma contante K_1 , fornecida pela fonte. E substituindo os valores de (1) em (3), teremos:

$$K_1 = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t)dt + v(t_0), \quad (4)$$

dada condição inicial $v(t_0) = v_0$.

Agora, derivando a Eq. (4) em relação ao tempo t , e dividindo por L e, lembrando que a tensão no capacitor não varia instantaneamente obtemos a EDLH de 2ª ordem, dada por

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC}i(t) = 0. \quad (5)$$

No circuito RLC em paralelo (Figura 4), usamos a Lei de Kirchhoff das correntes (LKC), ou seja,

$$I_S(t) - [I_R(t) + I_L(t) + I_C(t)] = 0, \quad t \geq 0 \quad (6)$$

onde I_S representa a corrente total fornecida pela fonte que é dada por uma constante K_2 . E, substituindo os valores da Eq. (2) na Eq. (6), obteremos:

$$K_2 = \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t)dt + i(t_0) + C \frac{dv(t)}{dt}. \quad (7)$$

Para simplificar a Eq. (7), dividimos por C , e depois derivamos em relação ao tempo t , obtemos a EDLH de 2ª ordem dada por:

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC}v(t) = 0. \quad (8)$$

Observe que, as Eq. (5) e Eq. (8) são EDLH de 2ª ordem de coeficientes constantes, pois R , L , C são constantes.

Nos circuitos apresentados nas Figura 3 e Figura 4 foram utilizados resistores, capacitores e indutores. Em outros circuitos com outras combinações de componentes, seja em série ou paralelo, basta eliminar da EDLH do termo correspondente ao elemento não utilizado no circuito desejado [4].

2.1 Resultado via MAPLE

Utilizando o software MAPLE para obter a solução geral do problema aplicado na EDLH de 2ª ordem dada na Eq. (8), e considerando o circuito elétrico em série da Figura 3, onde adotamos os valores $R = 5\Omega$, $C = \frac{1}{6}F$ e $L = 1H$, com condições iniciais $i(0) = 0,2A$ e $i'(0) = 0,01A/s$, obtendo a seguinte equação da corrente total do circuito elétrico em série:

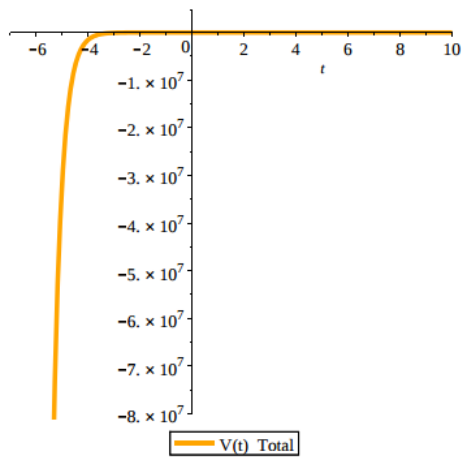
$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + 5 \frac{di(t)}{dt} + 6 i(t) = 0. \quad (9)$$

A Figura 4a mostra resolução no MAPLE da solução geral da EDLH da Eq. (9), dada por

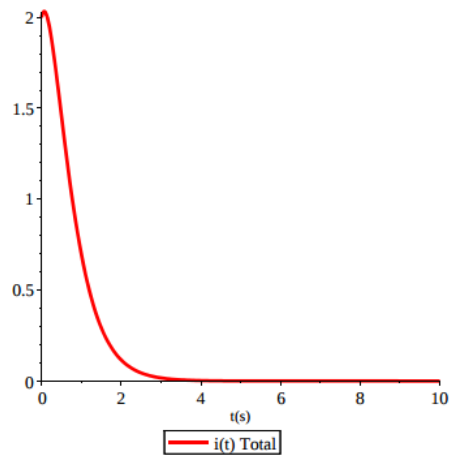
$$i(t) = -\frac{41}{100}.e^{-3t} + \frac{61}{100}.e^{-2t}, \quad (10)$$

denominada por corrente total do circuito elétrico em série, que com $R = 5\Omega$, $C = \frac{1}{6}F$ e $L = 1H$ e condições iniciais: $i(0) = 0,2A$ e $i'(0) = 0,01A/s$.

A Figura 3b mostra o comportamento da corrente total $i(t)$ e tensão total $v(t)$ (Eq. (10)) obtido com o auxílio do software MAPLE.

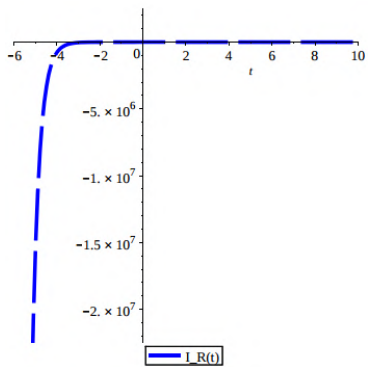


(a) Gráfico de $v(t)$ total

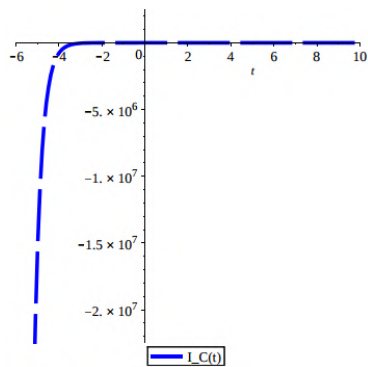


(b) Gráfico de $i(t)$ total

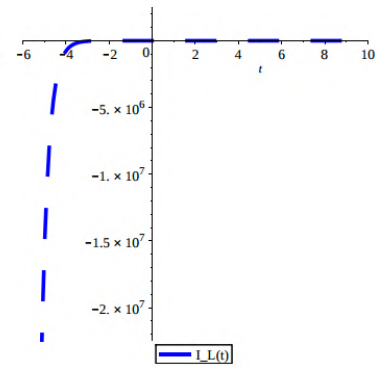
Figura 3: Comportamento da corrente total $i(t)$ e tensão total $v(t)$ do circuito elétrico em série, com $R = 5\Omega$, $C = \frac{1}{6}F$ e $L = 1H$ e condições iniciais: $i(0) = 0,2A$ e $i'(0) = 0,01A/s$. Fonte: Autores.



(a) Gráfico de $i_R(t)$

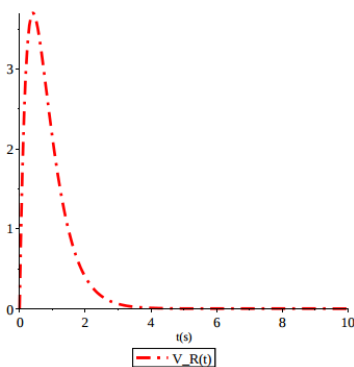


(b) Gráfico de $i_C(t)$

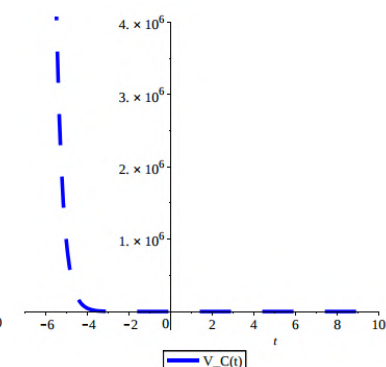


(c) Gráfico de $i_L(t)$

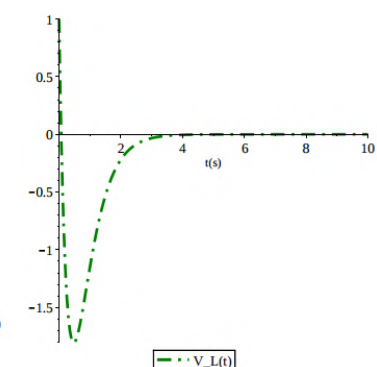
Figura 4: Comportamento das correntes do circuito elétrico em série, com $R = 5\Omega$, $C = \frac{1}{6}F$ e $L = 1H$ e condições iniciais: $i(0) = 0,2A$ e $i'(0) = 0,01A/s$. Fonte: Autores.



(a) Gráfico de $v_R(t)$



(b) Gráfico de $v_C(t)$



(c) Gráfico de $v_L(t)$

Figura 5: Comportamento das tensões do circuito elétrico em série, com $R = 5\Omega$, $C = \frac{1}{6}F$ e $L = 1H$ e condições iniciais: $i(0) = 0,2A$ e $i'(0) = 0,01A/s$. Fonte: Autores.

O gráfico da Figura 4 mostra a corrente do circuito em série, que é a mesma que passa em todos os elementos contidos nele. Já as Figuras 5a, 5b e 5c mostram as tensões sobre o resistor, capacitor e indutor, respectivamente. Nos circuitos em série há uma mesma corrente que percorre toda a malha, todavia cada elemento contido nessa malha sofre uma queda de tensão diferente que, quando somadas, é igual à tensão total fornecida pela fonte (Lei de Kirchhoff das tensões), como é o caso que abordamos com o circuito da Figura 2a e a Eq. (9). Já quando o circuito for em paralelo, todos os elementos contidos nele estão submetidos a uma mesma tensão, que é a da própria fonte, e cada elemento possui um valor de corrente diferente, como mostrado na Figura 2b.

3 Considerações Finais

Neste trabalho mostramos como as equações diferenciais podem contribuir para a análise de circuitos elétricos. A modelagem matemática de um circuito elétrico possibilita relacionar as grandezas físicas, como a corrente a tensão, e seu comportamento dentro do circuito. Partindo da modelagem computacional, os resultados obtidos a partir das soluções algébrica e gráfica das EDLH, por meio do software MAPLE, corroboram o comportamento das correntes e tensões dentro dos circuitos em série operando com corrente contínua (no caso de corrente alternada, teríamos uma EDLN-H e o comportamento dos parâmetros do circuito seria distinto). Assim, percebemos que as equações diferenciais são ferramentas matemáticas eficazes para a interpretar os problemas que envolvem circuitos elétricos na Engenharia.

Referências

- [1] ZILL, Dennis. G; CULLEN, Michael R. *Equações diferenciais*. Vol. 1, 3^a ed. Tradução Antonio Zupano; revisão técnica Antonio Pertence Jr. São Paulo: Pearson Makron, 2001.
- [2] ZILL, Dennis. G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. Tradução Márcio Koji Umezawa; revisão técnica Ricardo Miranda Martins, Juliana Gaiba Oliveira. 3^a ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.
- [3] BASSANEZI, Rodney C.; FERREIRA JR, Wilson C. *Equações diferenciais com aplicações*. São Paulo: Harbra, 1988.
- [4] DORF, Richard C.; SVOBODA, James A. *Introdução aos circuitos elétricos*. 7^a ed. Tradução revisão técnica Ronaldo Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

Estudo da Relação das Formas Algébricas e Geométricas das Superfícies Quádricas com Auxílio Computacional

FERREIRA, Francilene Cristina Oliveira*
DE OLIVEIRA, Michele Mariane*
SOUSA, Wilker Cássio*
ROSA, Marília Clara do Vale Mendes*
DA FONSECA, Regina Célia Bueno*

*{Instituto Federal de Goiás, Departamento de Áreas Acadêmicas II, Campus Goiânia}, {IFG}
redafonseca@gmail.com

8 de Abril de 2019

Resumo

A modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. O modelo matemático é o conjunto de símbolos e relações que procuram traduzir, de alguma forma, um problema de situação real. As disciplinas Geometria Analítica e os Cálculos Diferencial e Integral (II e III) procuram expressar a modelagem matemática das equações que descrevem as diferentes formas algébricas dos sólidos e das superfícies quádricas centradas e não centradas. Uma quádrlica é o conjunto de pontos no espaço \mathbb{R}^3 , cujas coordenadas cartesianas, verificam uma equação do 2º grau, a três variáveis. Esferas, parabolóides, elipsóides, hiperbolóides, cilindros (2º grau) e cones (2º grau) constituem as mais conhecidas superfícies quádricas. As novas tecnologias dos softwares matemáticos auxiliam essas disciplinas dando ênfase na visualização e representação geométrica desses sólidos e superfícies quádricas, bem como, facilitando o entendimento da relação entre suas definições algébricas. O objetivo principal desta pesquisa foi identificar e modelar as equações na forma canônica das superfícies quádricas, e para relacionar suas formas canônicas às formas geométricas utiliza-se o software de licença livre, o GeoGebra, que auxiliará na análise das propriedades que as caracterizam.

Palavras-Chave: Superfícies quádricas, Formas canônicas, Formas geométricas, Software GeoGebra, Software Maple.

1 Introdução

As dificuldades enfrentadas no ensino-aprendizagem da Geometria Analítica e do Cálculo Diferencial e Integral (II e III) se devem a necessidade de entender a descrição algébrica das equações que descrevem as retas, planos, sólidos e superfícies, em particular, das superfícies quádricas (centradas e não centradas) e cilíndricas. O recurso computacional de software matemático, podem auxiliar na interpretação visual geométrica e fazer a relação dos parâmetros apresentados em suas definições. Em geral, as superfícies quádricas são definidas por uma equação geral do 2º grau nas variáveis x, y, z , em que sua equação implícita, $F(x, y, z) = 0$, em que

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j, \quad (1)$$

onde $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ são números reais, sendo a, b, c não são todos nulos. O subconjunto $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / F(x, y, z) = 0\}$ que satisfaz a Eq.(1), representa uma superfície quádrlica [1, 2, 3].

A pesquisa restringiu ao caso particular das superfícies que satisfazem o seguinte tipo de equação

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + gx + hy + iz + j = 0, \quad (2)$$

onde a, b, c não são simultaneamente nulas [3]. Usando artifícios algébricos matemático na Eq.(2), obtêm-se os dois tipos de equações quádricas: as centradas e não centradas.

2 Desenvolvimento

Os softwares Maple e GeoGebra apoiaram o desenvolvimento do estudo. A seguir, mostramos os procedimentos do estudo na pesquisa de cada superfície quádrica. Iniciamos com as superfícies quádricas centradas seguidas das não centradas.

2.1 Quádricas Centradas

As superfícies quádricas centradas são definidas na forma algébrica por,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0, \quad (3)$$

onde $A, B, C, J \in \mathbb{R}$, sendo A, B, C são não nulos [1, 2, 5]. Por manipulações algébricas na Eq.(3), obtêm-se a forma canônica:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (4)$$

onde a, b, c números reais positivos não nulos. Das possíveis combinações de sinais dos coeficientes dos termos das variáveis x, y, z da Eq.(4), obtêm-se as três superfícies quádricas centradas: o Elipsóide, o Hiperbolóide de uma folha e o Hiperbolóide de duas folhas, sendo que estas são diferenciadas pelos sinais iguais e ou alternados dos coeficientes dos termos do 2^o grau nas variáveis x, y, z [2, 5].

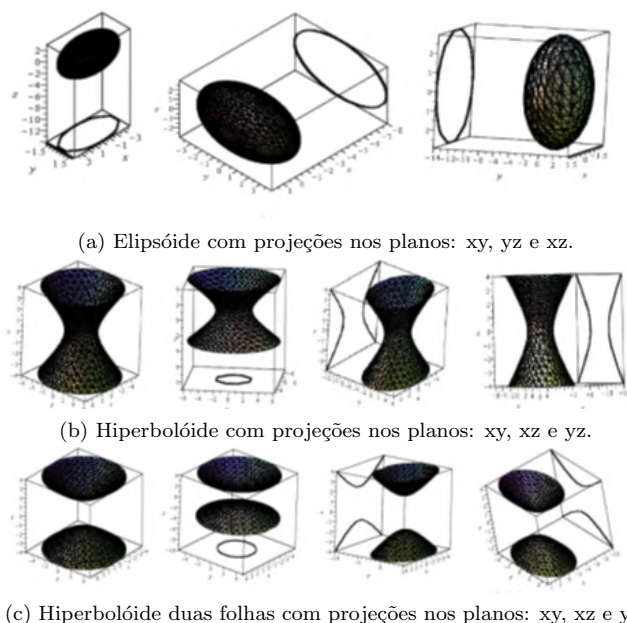


Figura 1: Superfícies Quádricas: Elipsóide, Hiperbolóide e Hiperbolóide de duas folhas. Fonte: Autores.

A partir da combinação dos sinais da Eq.(4), obtêm-se as três superfícies quádricas centradas: três sinais positivos, o Elipsóide; dois sinais positivos e um contrário, o Hiperbolóide de uma folha; e dois sinais negativos e um contrário, o Hiperbolóide de duas folhas [1, 2, 5]. A Figura 1 mostram, respectivamente, as três superfícies quádricas centradas em seus eixos de simetria, e as curvas cônicas projetadas nas três seções planas, obtidos no Maple [4].

2.2 Quádricas não Centradas

Por definição, o parabolóide elíptico é um conjunto de pontos no sistema de coordenadas representado pelas equações nas formas canônicas dadas nas Eq. (5). E se não tiverem nenhum dos coeficientes dos termos do 2º sinais iguais, então as Eq.(6) representam suas formas canônicas ao longo dos eixos com centro na origem [3, 4].

$$\pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = ax, \quad \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = by, \quad \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz. \quad (5)$$

Quando os termos à esquerda da igualdade da Eq.(5), possuem o mesmo sinal, obtemos a quádrlica não centrada denominada por parabolóide elíptico ao longo de seus eixos de simetria, ou seja, podemos obter três tipos de parabolóide elíptico descritas na Eq. (6):

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz, \quad (6)$$

A Figura 2 mostra o parabolóide hiperbólico ao longo do eixo z que foi plotada com o uso do software GeoGebra. E a Figura (3a) e a Figura (3b) mostram os parabolóides elípticos plotado ao longo do

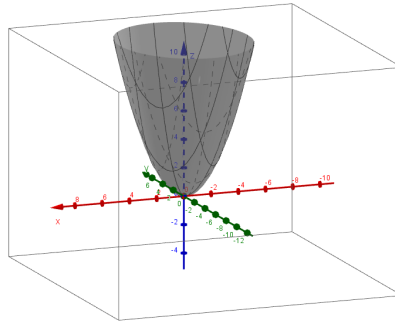


Figura 2: Parabolóide Elíptico ao longo do eixo z no Software GeoGebra definido pela função na forma implícita $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$. Fonte: Autores.

eixo x e ao longo do eixo y, respectivamente. E mais, mostram suas curvas canônicas (parábola e elipse) projetadas nos planos coordenados, e obtidas usando o software Maple.

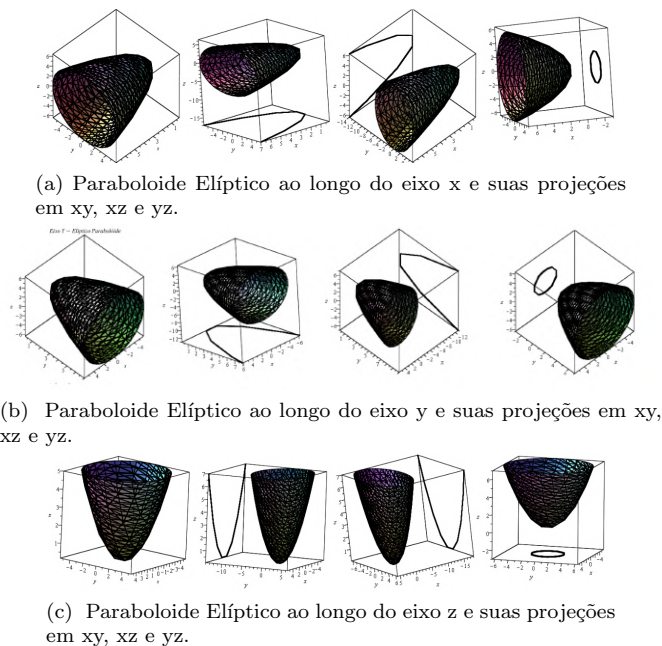


Figura 3: Superfícies Não Quádricas: Parabolóide Elíptico e Parabolóide Hiperbólico. Fonte: Autores.

Com relação ao estudo das curvas cônicas projetada nos planos coordenados, as curvas obtidas são a elipse e a hipérbole, cujas posições dependem do eixo de simetria escolhida para plotar a superfície quádrlica não centrada. As projeções da superfície quádrlica são mostradas nas Figura (3a), Figura (3b) e Figura (3c), que mostram também, as curvas cônicas nos planos coordenados, sendo em dois planos, a curva da parábola, e no terceiro plano, uma elipse, plotadas com o auxílio do software Maple, e usando o carregamento da biblioteca *Student:-MultivariateCalculus* e do comando *plots* para gerar os gráficos. E para obter as superfícies quádrlicas não centradas e suas curvas canônicas nos planos coordenados, usamos o comando *implicitplot3d* no Maple. Um detalhe que pode ser observado na Figura (3a) e Figura (3b), as posições das curvas nos planos coordenados mudam conforme o eixo de simetria da superfície quádrlica não centrada.

Por outro lado, quando os termos à esquerda da igualdade das Eq. (5) possuem sinais contrários, obtemos a superfície quádrlica não centrada denominada por parabolóide hiperbólico, como mostra a Figura (4).

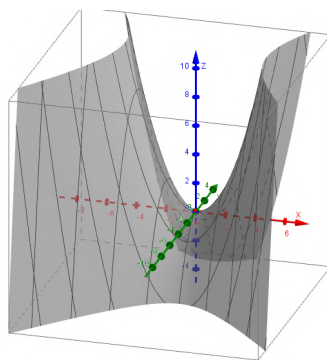


Figura 4: Parabolóide Hiperbólico ao longo do eixo z no Software GeoGebra definido pela função na forma implícita $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$. Fonte: Autores.

Por definição, o parabolóide hiperbólico é um conjunto de pontos no sistema de coordenadas representado pelas equações na forma canônica se nas Eq. (5), e os coeficientes dos termos do 2^o tiverem sinais contrários, então as Eq. (7) representam suas formas canônicas ao longo dos eixos com centro na origem [3, 4, 5].

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz, \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = by, \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = ax. \quad (7)$$

Com relação ao estudo das curvas cônicas projetada nos planos coordenados, as curvas obtidas são a elipse e a hipérbole, cujas posições dependem do eixo de simetria escolhida para plotar a superfície quádrlica não centrada. As projeções da superfície quádrlica são mostradas na Figura (5), que mostram também, as curvas cônicas nos planos coordenados, sendo em dois planos, a curva da parábola, e no terceiro plano, uma hipérbole, que são obtidas quando alternamos o eixo de projeção do parabolóide hiperbólico.

Podemos observar que, a Eq. (7) sofre influência da definição de hipérbole que é um conjunto de pontos, cuja a diferença das distâncias de cada um desses pontos, aos focos é constante.

Outro detalhe que pode ser observado na Figura (6), é que posições das curvas nos planos coordenados mudam conforme o eixo de simetria da superfície quádrlica não centrada. As sobreposições das curvas, a partir de alternância nas variáveis, revelaram os cortes com os planos que exemplificam a formação de duas parábolas e uma hipérbole.

3 Considerações Finais

A mostrou a importância da modelagem matemática das equações que descrevem as superfícies quadráticas (centradas e não centradas), bem como, os traçados de suas curvas canônicas nas seções planas, denominados como planos coordenados, que foram obtidos por meio de "cortes" planos paralelos aos eixos coordenados.

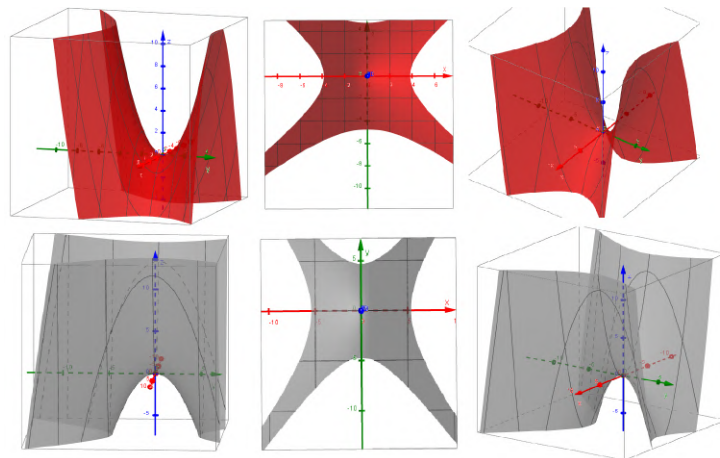


Figura 5: Parabolóides hiperbólicos ao longo do eixo z, plotado com o software GeoGebra. Fonte: Autores.

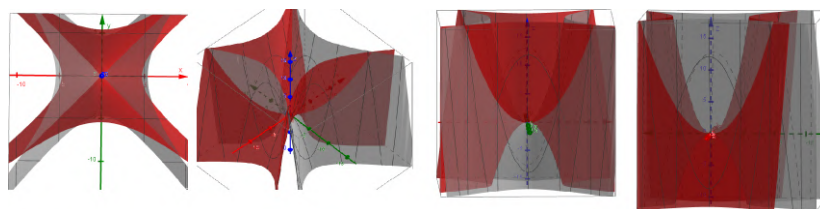


Figura 6: Sobreposição de $F(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{3}$ e $G(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3}$ com auxílio do Software GeoGebra. Fonte: Autores.

Identificar e modelar as equações na forma canônica das superfícies quádricas, e para relacionar suas formas canônicas às formas geométricas utiliza-se o software de licença livre, o GeoGebra, que auxiliará na análise das propriedades que as caracterizam.

Os softwares GeoGebra e Maple confirmaram suas funcionalidades e potencialidades como recursos didáticos computacionais.

Referências

- [1] EDWARDS, C. H. Jr.; PENNY, D. E. *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 2. 4ª Edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 1999.
- [2] MUNEM, M. A.; FOULIS D. J. *Cálculo*, Volume 2. Editora Guanabara. Rio de Janeiro, 2008.
- [3] RINCON, L. F. *Designing Dynamic and Interactive Applications Using GeoGebra Software in the Mathematics Curriculum*. Kean University. Mathematics, Kean University, 2009.
- [4] NAGAMINE, A. *Um Curso de Maple*. Universidade Estadual de Santa Cruz. Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas. 2001.
- [5] STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Geometria Analítica*. 5ª Edição. Editora Cengage Learning. São Paulo, 2008.

Conjunto de Cantor

Oliveira, Fábio Neves

Instituto Federal de Goiás, IFG

fabioufg25@gmail.com

Couto, Kelvin Rodrigues

Instituto Federal de Goiás, campus Goiânia, IFG

kelvin.couto@ifg.edu.br

2 de Abril de 2019

1 Introdução

Georg Cantor (1845-1918) nasceu em S.Petersburgo na Rússia, mudou-se para Alemanha com onze anos de idade, onde cursou doutorado pela Universidade de Berlim em 1867. J.W.R.Dedekind (1831-1916) de Braunschweig reconheceu os conjuntos infinitos, mas Cantor foi além para reconhecer as diferentes formas de infinitudes dos conjuntos. Cantor então desenvolveu sua teoria moderna de conjuntos, e essa teoria foi uma enorme contribuição para matemática moderna.

Dizemos que dois conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade, caso exista uma função $f : A \rightarrow B$ bijetora. Caso exista uma função $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ bijetora, então dizemos que o conjunto A é enumerável. Em 1894, Cantor demonstrou que o conjunto dos números reais tem cardinalidade diferente do conjunto dos números naturais.

Definiremos neste trabalho o conjunto de Cantor, que tem características importantes: é um conjunto compacto que tem interior vazio, não contém pontos isolados e é não enumerável. O propósito deste trabalho é lidar com as primeiras propriedades aprendidas sobre conjunto de Cantor em um curso inicial de Análise real.

2 Desenvolvimento

Definição 1 *O conjunto de Cantor, que denotaremos neste trabalho por K , é um subconjunto do intervalo $[0, 1]$ definido como limite do seguinte processo iterativo:*

Passo 0 - De início considere o conjunto $A_0 = [1, 0]$;

Passo 1 - Retira-se o intervalo aberto, dado pelo terço do meio do intervalo A_0 e ficamos com o conjunto restante: $A_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$;

Passo 2 - Retira-se o intervalo aberto, dado pelo terço do meio de cada subintervalo A_1 criado no passo-1, e ficamos com o conjunto restante:

$$A_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$$

O Passo n - Retira-se o intervalo aberto, dado pelo terço do meio de cada subintervalo A_{n-1} criado no passo- $n - 1$, e ficamos com o conjunto restante.

Definimos, assim, o Conjunto de Cantor como $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

2.1 Propriedades

Veremos que o Conjunto de Cantor K :

- i - É um conjunto Compacto, ou seja, é um conjunto simultaneamente fechado e limitado;
- ii - Tem interior vazio, isto é: tomando V_p uma vizinhança qualquer de um ponto arbitrário p em K :

$$V_p \cap K^C \neq \emptyset$$

Em outras palavras, não existe uma vizinhança V_p inteiramente contida em K .

- iii - Não possui pontos isolados. Todos seus pontos são de acumulação. Portanto, tomando V_p uma vizinhança qualquer de um ponto arbitrário p em K :

$$V_p \cap (K - \{p\}) \neq \emptyset$$

- iv - É um conjunto não-enumerável, pois é infinito e não existe uma bijeção $f : K \rightarrow \mathbb{N}$.

As propriedades anteriormente enumeradas serão demonstrada durante a apresentação do trabalho, e podem ser encontradas na referência [4].

3 Considerações Finais

O Conjunto de Cantor é um conjunto que tem construção simples de ser entendida e que é abundante em propriedades. Este trabalho foi um motivador para que o leitor possa perceber a riqueza deste conjunto, que explora muitos conceitos da Análise Real. Aprofundando o estudos em matemática e sobre o conjunto de Cantor pode-se verificar que o Conjunto de Cantor possui medida de Lebesgue igual a zero, também pode-se estudar o conjunto de Cantor com respeito a fractais, e pode-se generalizar o conjunto de Cantor por conjuntos chamados p-Cantor.

Referências

- [1] ÁVILA, G.S.S. Cantor e a teoria dos conjuntos. Revista do professor de Matemática, 43. UFG/GO, 2000.
- [2] FERNANDEZ, P. J. Medida e Integração. Rio de Janeiro: IMPA, 2002
- [3] FREIRIA, A. A. A teoria dos conjuntos de Cantor. Paidéia, n. 2, p. 70-77, 1992.
- [4] Lima, E. L. Análise Real. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Univeristária, IMPA, V. 1, 2004.

O USO DO ALGORITMO DE COLÔNIA DE ABELHAS PARA MONITORAMENTO ESTRUTURAL DE UM SISTEMA HIDRÁULICO

Oliveira, Robson Medrado de

Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, UFG

robsonmedradooli@gmail.com

Rosa, Renan Garcia

Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, UFG

renangarcia@gmail.com

Barella, Bruno Pereira

Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, UFG

brunobarella@hotmail.com

Rezende, Stanley Washington Ferreira de

Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, UFG

stanley-washington@hotmail.com

Moura Júnior, José dos Reis Vieira de

Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, UFG

zerjunior@yahoo.com

08 de Abril de 2019

1 Introdução

Sistemas hidráulicos que utilizam tubos de Polyvinyl chloride (PVC) estão sendo cada vez mais usados para transportar fluidos. Danos causados por rachaduras, corrosões são responsáveis por grandes perdas nesses sistemas [1]. Equipamentos industriais e estruturas podem apresentar falhas, essas podem estar associadas a diferentes fatores, tais como, atrito, impacto, fadiga, concentração de tensão, corrosão, crescimento de trinca, entupimento, dentre outras razões. Para que um sistema funcione adequadamente é necessário que uma determinada falha existente seja encontrada e reparada. Um dos processos ambiciosos da engenharia atualmente é o monitoramento de integridade estrutural em tempo real de equipamentos ou estruturas [6, 7].

Os métodos de monitoramento de integridade estrutural tem por finalidade detectar, em tempo real ou não, falhas estruturais. São aplicados em diversas áreas, nas infraestruturas civis como viadutos, edifícios, estradas, plataformas petrolíferas, etc., em estruturas aeronáuticas e aeroespaciais como aviões, helicópteros, satélites, estações espaciais, etc. e nas grandes estruturas marítimas, submarinos e navios [2, 6]. Atualmente existem diversos métodos de monitoramento de integridade estrutural, abordaremos o monitoramento estrutural baseado na impedância eletromecânica.

A impedância mecânica de um sistema mecânico é o quociente entre uma força aplicada a esse sistema mecânico dividida pela velocidade linear alternada resultante, na direção da força e no seu ponto de aplicação, é denotada pela equação (1) [2, 3, 6].

$$Z_m = \frac{F}{X(t)} \quad (1)$$

onde temos que Z_m é a impedância mecânica, F é a força e $X(t)$ a velocidade. A impedância mecânica é uma grandeza complexa que representa o quanto uma determinada estrutura resiste ao movimento de uma força aplicada sobre ela, essa grandeza sobre variações de acordo com a frequência, ou seja, nas frequências de ressonância, a impedância é baixa, significa dizer que menos força é necessária para movimentar uma estrutura dada uma velocidade [3, 6].

Esta técnica de monitoramento objetiva obter funções de resposta de frequência (*FRFs*) da estrutura e posteriormente avaliar as modificações destes sinais de forma periódica. Quando ocorre uma modificação destas (*FRFs*), indica que houve modificação na estrutura e, portanto, uma falha. No que se refere à identificação da melhor faixa de frequência a ser monitorada para uma estrutura, [8] sugere que as faixas acima de 200KHz são favoráveis para obtenção de falhas localizadas, enquanto menores que 70KHz são mais indicadas para áreas maiores de falhas.

A aplicação do método é trivial, utilizamos o Titanato Zirconato de Chumbo (PZT) que serve de sensor/atuador, o mesmo é excitado em alta frequência sofrendo uma deformação causando uma excitação na estrutura monitorada, em seguida com base no PZT é feita a medição da impedância eletromecânica, possibilitando a obtenção de pequenos danos como, trincas, furos, entupimentos entre outros na estrutura que está sendo analisada [3, 6, 7].

Novas técnicas bioinspiradas estão sendo desenvolvidas nos últimos anos. Diferente da otimização clássica, se baseiam em uma população de candidatos à solução do problema e na estratégia para atualização da solução [3]. Existem muitos métodos inspirados na natureza, os chamados bioinspirados, neste trabalho utiliza-se o ACA - Algoritmo de Colônia de Abelhas proposto por [9] para resolver problema de otimização da faixa de frequência do monitoramento estrutural de um sistema hidráulico.

Esse método baseia-se no comportamento de colônias de abelhas em busca de suprimentos para produção do mel, onde em cada colmeia são recrutados grupos de abelhas, as abelhas escoteiras, para explorar novas áreas com a finalidade de buscar pólen e néctar. [9, 3].

2 Desenvolvimento

A tubulação utilizada foi do tipo Polyvinyl chloride (PVC) de 100 mm, inicialmente foi feito o monitoramento do sistema hidráulico sem o dano (baseline) como mostra a Figura 1.

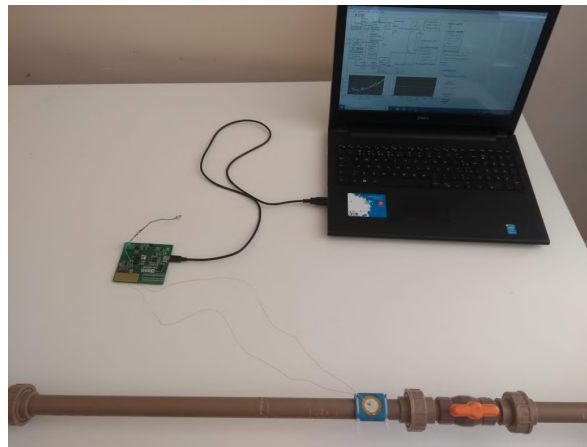


Figura 1: Tubulação sem dano.

De forma análoga foi feito o monitoramento da estrutura com dano onde utilizou-se uma braçadeira para simular o dano como mostra a Figura 2.



Figura 2: Tubulação com dano.

Utilizou-se a faixa de frequência entre 20–100KHz para o monitoramento, com passo de 156Hz, onde foram analisados um total de 4096 pontos.

Após os monitoramentos da estrutura com e sem dano utilizou-se apenas a parte real da impedância, aplicando assim o algoritmo de Colônia de Abelhas em que a função objetivo utilizada foi a métrica de dano M_{RMSD} :

$$M_{RMSD} = \sum_{i=1}^n \frac{[Re(Z_{(1,i)}) - Re(Z_{(2,i)})]^2}{([Re(Z_{(1,i)})]^2)} \quad (2)$$

onde M_{RMSD} é a medida da falha, $Z_{(1,i)}$ o sinal da impedância medido pelo PZT na estrutura sem dano, $Z_{(2,i)}$ o sinal da impedância medido pelo PZT na estrutura com dano, i representa o intervalo de frequência e n a quantidade de pontos a serem analisados. A Tabela 1 mostra a convergência do método após 10 simulações.

Simulação	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10 iterações e 5 abelhas	3041	3060	3069	3031	2937	2958	2817	3029	3057	3057
10 iterações e 10 abelhas	3043	3042	3038	3062	3048	3051	3018	2826	2979	3046
15 iterações e 15 abelhas	3052	3030	3034	3047	3042	3042	3042	3042	3044	3042
20 iterações e 20 abelhas	3042	3042	3042	3042	3042	3042	3042	3042	3042	3042

Tabela 1: Resultado das 10 simulações usando o Algoritmo de Colônia de Abelhas .

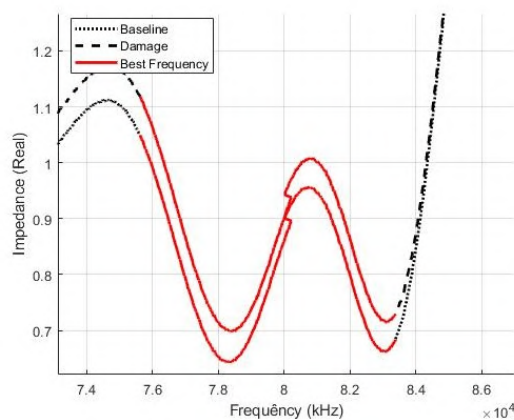


Figura 3: Faixa otimizada pelo Algoritmo de Colônia de Abelhas.

Observou-se através da Tabela 1 e Figura 3 a possibilidade do uso da otimização de faixa de frequência usando o Algoritmo de Colônia de Abelhas, o mesmo conseguiu convergir para faixa de com maior divergência entre a estrutura sem e com o dano. Assim possibilitando a identificação do dano na estrutura de tubulação.

3 Considerações Finais

Neste trabalho monitorou-se uma estrutura hidráulica com o intuito de encontrar o dano ocasionado na mesma. Assim utilizou-se a métrica de dano M_{RMSD} como função objetivo e o Algoritmo de Colônia de Abelhas para encontrar a faixa de frequência com maior divergência, ou seja, mais sensível para a localização de danos nessa estrutura. Com essa faixa otimizada é possível monitorar a evolução do dano ao longo do tempo evitando possíveis rompimentos na estrutura.

Referências

- [1] HONG, X., et al. *Crack detection in plastic pipe using piezoelectric transducers based on nonlinear ultrasonic modulation*. Smart Materials And Structures, v. 26, n. 10, p. 104012-104025, 2017.
- [2] BAPTISTA, F. G. Uma Contribuição aos Sistemas de Monitoramento de Integridade Estrutural Baseados na Impedância Eletromecânica. 2010. 93f. Tese de Doutorado. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Ilha Solteira.
- [3] BENTO, J. P. M. Uso das Cadeias de Markov Associado ao Monitoramento da Integridade Estrutural Baseado em Impedância Eletromecânica. 2018. 120f. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Goiás, Catalão.
- [4] CHIROMA, Haruna et al. A review of the applications of bio-inspired flower pollination algorithm. Procedia Computer Science, v. 62, p. 435-441, 2015.
- [5] FISTER, Iztok; YANG, Xin-She; FISTER, Dušan. Cuckoo search: a brief literature review. In: Cuckoo search and firefly algorithm. Springer, Cham, 2014. p. 49-62.
- [6] MOURA Jr., J. R. V. Uma Contribuição aos Sistemas de Monitoramento de Integridade Estrutural Aplicada a Estruturas Aeronáuticas e Espaciais. 2008. 264f. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.
- [7] SILVA, R. N. F. Monitoramento de Integridade Estrutural Utilizando a Técnica da Impedância Eletromecânica Aplicada em Estruturas de Concreto. 2017. 161f. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.
- [8] SUN, F. P. et al. Truss structure integrity identification using pzt sensor-actuator. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, v. 6, n. 1, p. 134-139, 1995.
- [9] LUCIC, P.; TEODOROVIC, D. Bee system: modeling combinatorial optimization transportation engineering problems by swarm intelligence. In: Preprints of the TRISTAN IV triennial symposium-transportationanalysis,p.441-445, 2017.